山东师范大学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

注意事项：1. 本试卷共 七 道大题（共计 17 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一.（14分）求下列极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(\cos\frac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$.

二.（12分）求下列函数的导数或微分

1. 设函数 $y=(\tan x)^x$，求 $\frac{dy}{dx}$.

2. 设函数 $f(x,y)=x^y$，求 $df(x,y)$.

三.（48分）计算下列各题

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$.

2. $\max\limits_{0\le s\le 1}\int_0^1\left|\ln|s-t|\right|dt$.

3. $\int_L y^2 ds$，其中 $L: x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0$.

4. $\oint_{C^+}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中C是以$(1,0)$为圆心，以2为半径的圆周，$C^+$表示C上的方向为逆时针方向.

5. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\ (b>a>0)$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

四.（8分）将函数$f(x)=x$在$(0,1)$内展开成余弦级数.

五.（8分）求函数$z=e^{2x}(x+y^2+2y)$的极值点.

六.（30分）讨论下列各题

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

试讨论f在$(0,0)$点的连续性、偏导数存在性与可微性.

2. 试确定函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$的收敛域，并讨论其和函数的连续性.

七.（30分）证明下列各题

1. 设函数$f(x)$在(a,b)内有定义，对任意$\xi\in(a,b)$，存在$\delta>0$，当$x\in[\xi-\delta,\xi+\delta]\cap(a,b)$时有

$$f(x)<f(\xi)\ (当x<\xi时);\quad f(x)>f(\xi)\ (当x>\xi时).$$

试证明$f(x)$在(a,b)内严格增.

2. 试证明数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增.

3. 设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上有连续导数，试证明

$$|f(0)| \le \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|dx + \int_0^a |f'(x)|dx.$$