

山 东 师 范 大 学
硕士研究生入学考试试题

考试科目： 量子力学

- 注意事项：1. 本试卷共 2 道大题（共计 11 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
- *****

一、简答题（共 7 小题，每题 10 分，共 70 分）

1. 一维自由粒子波函数 $\psi(x) = \delta(x)$ 是否定态波函数？为什么？
2. 对于力学量 A 与 B ，写出二者在任何量子态下涨落所满足的关系。
3. 一维动量表象中，写出坐标和动量的算符形式和它们本征函数表达式。
4. 什么是量子力学中的守恒量？它有什么特性？
5. 证明宇称算符的本征函数非奇即偶。
6. 一维体系的哈密顿算符具有分立谱，证明该体系的动量在能量本征态中的平均值等于零。
7. 中心力场中，粒子的哈密顿算符为 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)$ ，试证明角动量是守恒量。

二、计算题（4 小题，共 80 分）

1. （20 分）质量为 m 的粒子处于宽度为 a 的一维无限深势阱中，设 $t=0$ 时粒子的状态为 $\Phi(0) = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 + c_4\varphi_4$ ， $\varphi_i (i=1,2,3,4)$ 是能量为 E_i 时一维无限深势阱的归一化本征函数， $c_i (i=1,2,3,4)$ 是已知的常数。求：
 - (1) $t=0$ 时测量能量结果小于 $3\pi^2\hbar^2/(ma^2)$ 的几率
 - (2) $t=0$ 时能量 E 和 E^2 的平均值
 - (3) t 时刻的波函数 $\Phi(t)$
 - (4) 如果在 Φ 态测量能量，所得结果为 $8\pi^2\hbar^2/(ma^2)$ ，问测量后粒子处在何种状态？

2. (20 分) 原子中两态之间电偶极跃迁几率同两态之间电偶极矩平方成正比。

已知氢原子波函数 $\psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$, 取玻尔半径 $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$ 为长度单位,

则:

$$R_{10} = 2e^{-r}, R_{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} (2-r)e^{-r/2}, R_{21} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} \frac{r}{\sqrt{3}} e^{-r/2};$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$$

(1) 试算出 $n=2$ 的所有矩阵元 $\langle \psi_{nlm} | z | \psi_{100} \rangle$;

(2) 结合你的计算结果, 讨论这种矩阵元所涉及的有关 $\Delta l, \Delta m$ 的选择定则 (不考虑自旋)。

3. (20 分) 设一个定域电子处于沿 z 轴方向的均匀弱磁场 \vec{B} 中 (不考虑电子的

轨道运动), 电子的内禀磁矩为 $\vec{\mu}_s = -\frac{e}{\mu c} \vec{s}$ 。设 $t=0$ 时电子处于 $\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

求 t 时刻所处的状态 $\psi(t)$ 及测得电子自旋在 z 方向的投影为 $\hbar/2$ 的几率。

4. (20 分) 质量为 μ 的粒子在一维势场 $V(z) = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ Gz, & z > 0 \end{cases}$ 中运动, 式中 $G > 0$ 。

(1) 用变分法计算基态能量时, 在 $z > 0$ 区域内的试探波函数应取下列波函数中的哪一个? 为什么?

$$(a) z + \lambda z^2 \quad (b) e^{-\lambda z^2} \quad (c) ze^{-\lambda z} \quad (d) \sin \lambda z$$

(2) 算出基态能量。

$$[\text{提示: 必要时可利用积分公式: } \int_0^\infty z^n e^{-\alpha z} dz = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}]$$