山东师范大学

二OO八年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学B

注意事项：1. 本试卷共 3 道大题（共计 17 个小题），满分 150 分；

2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 6 分，共 36 分）。

1、$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} =$ ______1______。

2、若 $\int \sin 5x \sin x dx$ ______2______。

3、设 $y = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2} + \sin x + \cos x)$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} =$ ______3______。

4、若 $f(x)$ 的一个原函数是 $e^x + \sin x$，则 $f'(x) =$ ______4______。

5、设 $z = \sin(xyz)$，则 $3\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} =$ ______5______。

6、已知 $f(x) = \cos x$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的 Taylor 级数为______6______。

二、证明题（本题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分）。

7、设 A 为 n 阶正定矩阵，I 为单位矩阵，证明 $A+I$ 的行列式 $\det[A+I] > 1$。

8、设函数 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有二阶连续导数，且对任意 $x \ge 0$ 有 $f''(x) \ge k$，其中 $k > 0$ 为一个常数，$f(0) < 0$。证明，$f(x)$ 在 $(0,\infty)$ 有且仅有一个零点。

三、解答题（本题共 9 小题，满分 98 分，解答应写出详细文字说明或演算步骤）。

9、（本题满分 12 分）求下列线性方程组的解 $\begin{cases} -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$。

10、（本题满分 12 分）设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，计算矩阵 $10A^{-1}$。

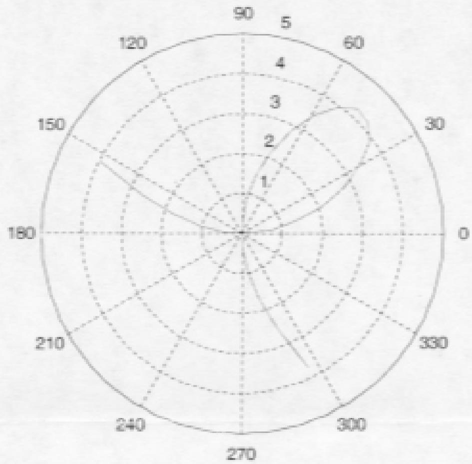
11、　(本题满分 12 分) 讨论下列二次型的正定性：

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

12、　(本题满分 12 分) 设区域 D 为曲线 $y = x^2, y = 1$ 所围成。计算积分 $\iint\limits_D \sqrt{y - x^2}\, dxdy$。

13、　(本题满分 12 分) 求极限 $\lim\limits_{x \to 0+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$。

14、　(本题满分 12 分) 笛卡尔叶形线的方程为 $x^3 + y^3 = 3axy$，($a > 0$)，见下列示意图。计算它所围成的面积。



15、　(本题满分 10 分) 设 $f(u, v)$ 具有连续的偏导数，定义：

$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y + z) + \frac{1}{2}x^2 yz + f(y - x, z - x)$$

计算 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ 的值。

16、　(本题满分 8 分) 将函数 $f(x) = \arcsin x$ 在原点展开成幂级数。

17、　(本题满分 8 分) 求 $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ 的极值。