山东师 范大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学 A

注意事项：1. 本试卷共 十 道 大题（共计 25 个小题），满分 150 分；

2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一．填空题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．曲线 $x^2y+\ln y=1$ 在点 $(1,1)$ 处的法线方程为______1______

2．设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1+x}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t dt$，则常数 $a=$______2______

3．设 $f(0)=2, f(-2)=0$，函数 $f(x)$ 在 $x=-1, x=5$ 处有极值，且 $f'(x)$ 是 x 的二次函数，则 $f(x)=$______3______

4．设 $\phi(cx-az, cy-bz)=0$，其中 $\phi(u,v)$ 可微，则 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=$______4______

5．二次积分 $\int_0^2 dx\int_0^{\frac{x^2}{2}}f(x,y)dy+\int_2^{2\sqrt{2}}dx\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)dy$ 改变积分次序后为

______5______

6．函数 $f(x)=2^x$ 展开成 x 的幂级数为______6______

二．单项选择题：（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1．若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数不为零，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是 （ 1 ）

(A) 与 Δx 等价的无穷小　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 与 Δx 低阶的无穷小　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

2．双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的面积可用定积分表示为 （ 2 ）

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta$　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta$

3．若 $f(x,y)$ 在区域 D 内具有二阶偏导数，则正确结论为 （ 3 ）

(A) 必有 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$　　(B) $f(x,y)$ 在 D 内必可微

(C) $f(x,y)$ 在 D 内必连续　　(D) (A)、(B)、(C)三个结论都不对

4．设有平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，并设 $M=\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$，

$N=\iint\limits_D \cos^2 x\cos^2 y dxdy$，$P=\iint\limits_D [e^{-(x^2+y^2)}-1]dxdy$，则有 （ 4 ）

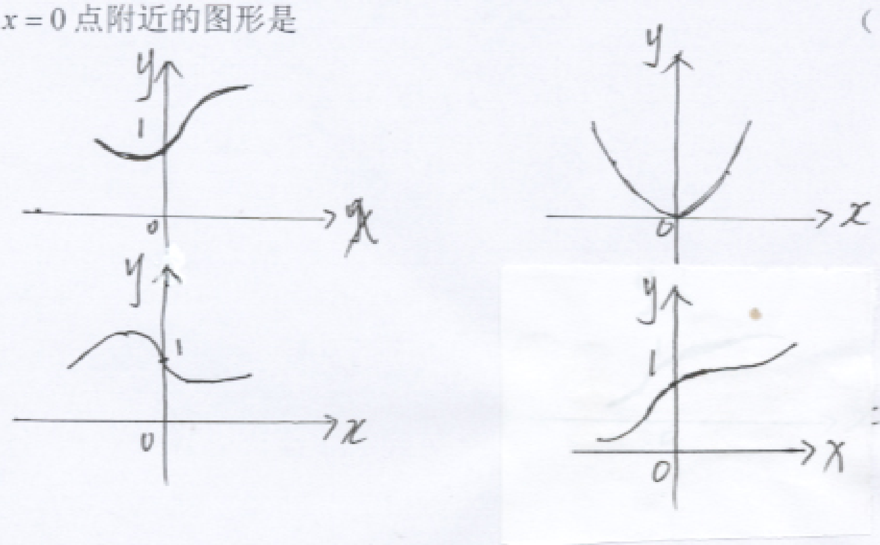
(A) $M>N>P$　(B) $N>M>P$　(C) $M>P>N$　(D) $N>P>M$

5．设曲线积分 $\int_L [f(x)-e^x]\sin y dx - f(x)\cos y dy$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$ （ 5 ）

(A) $\frac{1}{2}e^x-1$　　(B) $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

(C) $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})-1$　　(D) $1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

6． 微分方程 $y''+y=2\cos x-4x\sin x$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 点附近的图形是 （ b ）



三. 计算下列各题：(本题共 6 小题，每小题 6 分，满分 36 分)

1． $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

2．设 $f(1+x)-3f(1-x)=8x(1+|\sin x|)$ ，且 $f(x)$ 连续，求 $f'(1)$

3． $\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

4． $\int_0^2 f(x-1)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+e^x} & x<0\end{cases}$

5．设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由 $x+y+z+xyz=0$ 确定，求 $f_x(0,1,-1)$

6．计算二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{1-y^2}dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2=1(y\ge 0)$ 及 $y=|x|$ 所围成的区域

四.（本题满分 8 分）

求通过点(1,1)的直线 $y=f(x)$ 中，使得 $\int_0^2 [x^2-f(x)]^2 dx$ 为最小的直线方程

五.（本题满分 8 分）

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中Ω由 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$，$x^2+y^2=3z$ 所围成

六.（本题满分 8 分）

设当 $x>0$ 时，$f(x)$ 可导，且满足方程 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt,(x>0)$，求 $f(x)$

七.（本题满分 8 分）

求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解

八. **证明题**（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且严格单增。证明：$(a+b)\int_a^b f(x)dx<2\int_a^b xf(x)dx$

九.（本题满分 12 分）

若曲线积分 $I=\oint_L y^3dx+(3x-x^3)dy$，其中为 L 圆周 $x^2+y^2=R^2(R>0)$，方向取正向，求 R 为何值时，曲线积分 I 有最大值

十.（本题满分 12 分）设 $f(u)$ 有连续的二阶导数，且 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求 $f(u)$