山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数与解析几何

注意事项：1．本试卷共 9 道大题（共计 个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

高等代数部分

一、（15分）计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ a & a & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

二、（20分）给出将 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 化为标准形的正交线性替换.

三、（20分）设 V 是数域 P 上的 n 维线性空间，$\mathbf{A}$ 是 V 的一个线性变换，满足 $\mathbf{A^2}=\mathbf{A}$，而 $\mathbf{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵为 A．又设 $V_1=\{\mathbf{A}\alpha|\alpha\in\mathbf{V}\},\mathbf{V_2}=\{\alpha-\mathbf{A}\alpha|\alpha\in\mathbf{V}\}$. 证明：

(i) V 是 V_1 和 V_2 的直和.

(ii) A 和一个对角矩阵相似.

(iii) $A+E$ 是可逆矩阵.（其中 E 是 n 阶单位矩阵）

四、（15 分）设 A 是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵，V 是 P 上与 A 可交换的 $n\times n$ 矩阵的全体. 证明:

(i) V 对矩阵加法以及 P 中数与矩阵的数量乘法构成 P 上的一个线性空间.

(ii) 若 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 V 的维数与一组基.

五、（15 分）设实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$，其中 A 为 n 级实对称矩阵，m 为大于 n 的正整数. 证明: $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为半正定的充分必要条件是对任意的 $n\times m$ 实矩阵 B，实二次型 $g(x_1,\cdots,x_m)=X'(B'AB)X$ 是半正定的.

六、（15 分）设 $P[x]$ 是数域 P 上的一元多项式环，α 是一复数，$M=\{f(\alpha)\mid f(x)\in P[x]\}$. 证明: M 是数域的充分必要条件是 α 是 $P[x]$ 中某个次数大于零的多项式的根.

解析几何部分

七、（20 分）一平面通过二直线 $l_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{1}$ 和 $l_2:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+1}{2}$ 的公垂线，且平行于矢量 $\vec{v}=\{1,0,-1\}$. 求此平面的方程.

八、（15 分）求曲线 $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$ 的一对共轭直径的方程，已知其中一条通过原点.

九、（15 分）求曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的相互垂直的切线的交点的轨迹.