山东师范大学

硕士研究生入学考试试题B

考试科目：　离散数学

注意事项：1．本试卷共 十 道大题（共计 23　个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

一、（15 分）

判断下列命题公式类型（重言式、矛盾式、可满足式），并写出成真赋值和成假赋值。

1．用真值表法判断：　$(p\vee\neg p)\to((q\wedge\neg q)\wedge r)$

2．用等值演算法判断：$(p\to q)\wedge\neg p$

二、　（15 分）

1．求下式的主析取范式及成真、成假赋值。

$$(\neg r\vee(q\to p))\to(p\to(q\vee r))$$

2．构造下面推理证明（每步证明依据）

前提：$\neg p\vee q,\neg(q\wedge r),r$

结论：$\neg p$

三、　（15 分）

1．将下列函数序列在区间(a,b)内收敛的定义符号化：

设$f_1(x),\cdots f_n(x),\cdots$为函数序列，$f(x)$是一函数，若对任意给定的$\varepsilon>0$，任意的$x\in(a,b)$，都存在$N$，使得当n>N时，均有$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$，则称函数序列$\{f_n(x)\}$在区间$(a,b)$内收敛到$f(x)$。

2．求下列公式的前束范式

$$(\exists xA(x)\to\exists yB(y))\wedge\forall zC(z)$$

3．证明下列蕴涵式

$$\forall x(W(x)\to\neg B(x)),\forall x(B(x)\vee R(x)),\exists x(\neg R(x))\Rightarrow\exists x(\neg W(x))$$

四、(10 分)

设$<G,\circ>$为群，$a\in G$, 令$H=\{y|y\circ a=a\circ y, y\in G\}$，

试证明：$<H,\circ>$是$<G,\circ>$的子群。

五、(15 分)

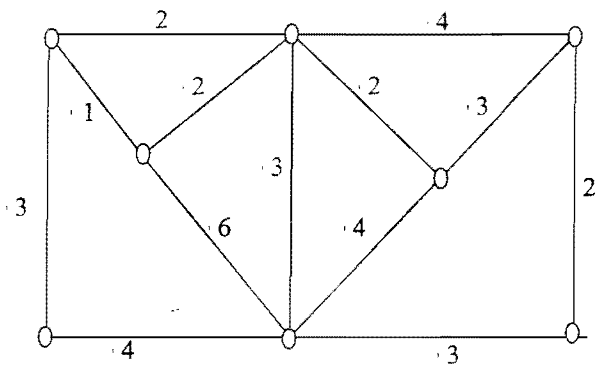
设$<Z_6,+_6>$是一个群，$+_6$是模6加法，$Z_6=\{[0],[1],\cdots,[5]\}$

试写出$<Z_6,+6>$中的每个子群及相应的左陪集。

六、(20 分)

设 G 是一个图，如下图所示。

1. 给出 G 的一个最小生成树；
2. 写出产生最小生成树的算法；
3. 证明由该算法得到的生成树一定是最小生成树。



七、(15 分)

给一组数：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41。

解下列问题：

1. 给出这组数对应的一棵最优二叉树；
2. 写出你在 1 中得到最优二叉树的理论依据；
3. 证明 2 中的理论的正确性。

八、(15 分)

设 D=（V，E）是一个有向图，其中$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，

$E=\{<v_1,v_2>,<v_2,v_1>,<v_2,v_3>,<v_1,v_3>,<v_3,v_4>,<v_4,v_3>,<v_4,v_4>\}$。

1．写出D的邻接矩阵和关联矩阵；

2．求出D的可达性矩阵；

3．将D中的可达性表示为关系：R={$<v_i,v_j>$ | 从 v_i 到 v_j 存在有向路}。R 具有哪些性质？并证明这些性质。

九、(15 分)

设 f 是整数集合 Z 到 Z 上的映射，n 是一个给定的整数，$f(x)\equiv x \pmod n$。构造 Z 上的关系 R：对任意的 x，y∈Z，<x，y>∈R 当且仅当 f(x) = f(y)。

1．证明 R 是等价关系；

2．求出由 R 确定的 Z 的划分。

十、(15 分)

设关系 f 是定义在 A 到 B 上的关系，若 $B_1 \subseteq B$，

试证明： $f(A\cap f^{-1}(B_1)) = f(A)\cap B_1$。