山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数与解析几何

注意事项：1．本试卷共　　道大题（共计　　个小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

* *

高等代数部分

1. $f(x)$, $g(x)$ 是两个多项式，证明：若 $(x^2+x+1)\mid[x^3f(x^3)+xg(x^3)]$，则 $(x^3-1)\mid[x^3f(x^3)+xg(x^3)]$．(12分)

2. A, C_i $(i=0,1,2,\cdots)$ 都是 n 阶方阵，且 $C_m=AC_{m-1}+E$（E 是单位矩阵）．当 $A=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$C_0=0$ 时，求 C_n．(15分)

3. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是数域 P 上的 n 维线性空间 V 中一组秩为 r 的向量，$W=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in P^n \mid a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=0\}$，证明 W 是 P^n 的子空间，并求其维数．(16分)

4. 三阶实对称矩阵 A 的特征值是 1, 2, 3，A 的属于特征值 1, 2 的特征向量分别是 $\xi_1=(-1,0,1)'$，$\xi_2=(1,1,1)'$．
(1) 求 A 的属于特征值 3 的特征子空间；
(2) 求矩阵 A．(12分)

5. V是数域P上所有2×2矩阵构成的线性空间. 取定$A\in V$, 定义V的线性变换σ如下: $\sigma(X)=AX\ (X\in V)$.

(1) 若A_1, A_2, A_3, A_4是V的一组基, B是P上的2×2可逆矩阵, 证明A_1B, A_2B, A_3B, A_4B也是V的一组基. 给出σ在这两组基下的矩阵之间的关系.

(2) 若A相似于对角矩阵, 证明σ的矩阵可以对角化(存在V的一组基使σ在此基下的矩阵为对角矩阵). (20分)

6. $\mathcal{A}$是n维线性空间V的线性变换, 证明: 必存在V的线性变换$\mathcal{B}$, 使$\mathcal{B}V=\mathcal{A}^{-1}(0)$, $\mathcal{B}^{-1}(0)=\mathcal{A}V$. (15分)

7. 证明: 若A是n阶正定矩阵, 则A的伴随矩阵A^*也是正定的. (10分)

解析几何部分

1. 已知点$A(1,-1,1)$, 直线L_1: $\begin{cases}x=0\\ y-z+1=0\end{cases}$, 求:

(1) 过A且与L_1垂直相交的直线L的方程;

(2) 过直线L且与xoy面垂直的平面π的方程. (15分)

2. 证明双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\ (a\neq b)$上的两直母线直交时, 其交点必在一双曲线上. (15分)

3. 求二次曲线$x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0$的标准方程, 并写出相应的坐标变换公式. (20分)