机密★启用前

青岛理工大学 2007 年硕士研究生入学试卷

考试科目代码: 417

考试科目名称: 高等代数

考生注意: 1. 答题必须写清题号，所有答案均须写在答题纸（本）上，写在试题卷、草稿纸上的答案无效; 2. 考毕时将试题和答题纸（本）一同上交。

一、(15 分) 下列每小题给出四个答案，用字母 A 、 B 、 C 、 D 标记，请将每题仅有的一个正确答案的标记字母填写在答题纸上（每题 3 分，注意表明题号）

1. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$, 则:

(A) A 中必有两行 (列) 的元素对应成比例.

(B) A 中任一行 (列) 向量是其余行 (列) 向量的线性组合.

(C) A 中有一行 (列) 向量是其余行 (列) 向量的线性组合.

(D) A 中至少有一行 (列) 的元素全为.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 n 维向量，那么下面结论正确的是:

(A) 若 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

(D) $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

3. 设 n 阶矩阵 A 非奇异 $(n\geq 2)$, A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^*=$.

(A) $|A|^{n-1}A$ (B) $|A|^{n+1}A$ (C) $|A|^{n-2}A$ (D) $|A|^{n+2}A$

4. $A=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}$, 则矩阵 A 与 B 的关系为:

(A) 合同且相似. (B) 合同但不相似. (C) 不合同但相似. (D) 不合同不相似.

5. 设 A,B 均为 n 阶矩阵， E 为 n 阶单位阵，有下面结论正确.

(A) 若$E-AB$可逆，必有$E-BA$可逆. (B) 若$E-AB$可逆, $E-BA$不一定可逆.

(C) 若A与B正交, 则$A+B$正交. (D) 若A与B正定，则AB正定.

二. (15 分) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 1 \end{vmatrix}$

三. (12 分) 设 A, B 都是 n 阶方阵, 证明: 线性方程组 $ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解的充要条件是秩 $(AB) =$ 秩 (B).

四. (12 分) 设矩阵 A 满足等式: $A^2 - A - 6E = 0$, 证明: $A + 3E, A - 2E$ 都是可逆矩阵, 并将它们的逆矩阵表示为 A 的多项式.

五. (20 分) λ 取何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$

(1) 无解, 有唯一解, 有无穷多解.

(2) 有无穷多解时, 求出方程组的通解.

六. (20 分) 已知二次曲面 $x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 4$, 可以经正交变换 $x = Ty$, 化为椭圆柱面方程 $y_2^2 + 4y_3^2 = 4$, 求 a, b 的值和正交矩阵 T.

七. (10 分) 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, A 正定, 证明: 存在实可逆阵 T, 使 $T'(A+B)T$ 为对角阵.

八. (16 分) P 是数域, $P^{n\times n}$ 关于矩阵加法和数乘运算构成线性空间,

$V_1 = \{A | A \in P^{n\times n}, A' = A\}$

(1) 证明 V_1 是 $P^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 求 $P^{n\times n}$ 的子空间 V_2, 使 $P^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$.

九. (20 分) 定义三维向量空间 $V = R^3$ 上的变换 T 为:

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, x_2 + x_3, x_1 - x_2 - 3x_3)$

(1) 证明 T 是线性变换.

(2) 求 T 在基 $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$ 下的矩阵 M.

(3) 求 T 的值域 TV, 给出 TV 的维数及一组基.

(4) 求 T 的核 $T^{-1}(0)$, 给出 $T^{-1}(0)$ 的维数及一组基.

十. (10 分) 在复数域上求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 的有理标准形和 Jordan 标准形.