

机密★启用前

青岛理工大学 2007 年硕士研究生入学试卷

考试科目代码: 702

考试科目名称: 数学分析

考生注意: 1. 答题必须写清题号, 所有答案均须写在答题纸(本)上, 写在试题卷、草稿纸上的答案无效; 2. 考毕时将试题和答题纸(本)一同上交。

一. 计算题 (60 分):

1. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$, 其中常数 $p > 0$.2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right\}$.3. 设 $f(x) = \sin x^2$, 求 $f^{(n)}(0) (n = 1, 2, \cdots)$.4. 计算不定积分 $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$.5. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ 处的切平面方程.6. 计算二重积分 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$, 其中区域 D 由直线 $x+y=1, x=0, y=0$ 围成.

二. 证明: 任何实系数奇数次代数方程至少有一个实根 (13 分).

三. 证明不等式: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, x > 0$ (13 分).

四. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots), \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. 证明存在子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 使得正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ 收敛 (13 分).

五. 设 α, β 为非负常数. 证明函数 $f(x, y) = |x|^\alpha |y|^\beta$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的充分必要条件是: $\alpha = \beta = 0$ 或 $\alpha + \beta > 1$ (13 分).

六. 证明函数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上连续, 且反常积分 $\int_1^2 \sqrt{f(x)} dx$ 收敛 (13 分).

七. 求积分 $\int_0^{2\pi} \frac{3 + \sin 2x}{2 + \cos x} dx$ 之值 (12 分).八. 求积分 $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy) dx$ 之值 (13 分).