机密★启用前

青岛理工大学 2008 年硕士研究生入学试卷

考试科目代码：817

考试科目名称：高等代数

考生注意：1．答题必须写清题号，所有答案均须写在答题纸（本）上，写在试题卷、草稿纸上的答案无效；2．考毕时将试题和答题纸（本）一同上交。

一．（20 分）下列每小题给出四个答案，用字母 A 、B 、C 、D 标记，请将每题仅有的一个正确答案的标记字母填写在答题纸上（每题 4 分，注意表明题号）

1. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=0$，则：

(A) A 中必有两行 (列) 的元素对应成比例.

(B) A 中任一行 (列) 向量是其余行 (列) 向量的线性组合.

(C) A 中有一行 (列) 向量是其余行 (列) 向量的线性组合.

(D) A 中至少有一行 (列) 的元素全为.

2. 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为：

(A) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出.

(B) 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出.

(C) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价.

(D) 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 等价.

3. 设 n 阶矩阵 A 非奇异 $(n\geq 2)$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^*=$.

(A) $|A|^{n-1}A$　　(B) $|A|^{n+1}A$　　(C) $|A|^{n-2}A$　　(D) $|A|^{n+2}A$

4. $A=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$，$B=\begin{vmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{vmatrix}$，则矩阵 A 与 B 的关系为：

(A) 合同且相似.　(B) 合同但不相似.　(C) 不合同但相似.　(D) 不合同不相似.

5. 设 A,B 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位阵，有下面结论正确.

(A) 若$E-AB$可逆，必有$E-BA$可逆.　(B) 若$E-AB$可逆，$E-BA$不一定可逆.

(C) 若A与B正交，则$A+B$正交.　(D) 若A与B正定，则AB正定.

二. (12 分) 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$

三. (12 分) 设 A, B 都是 n 阶方阵, 证明: 线性方程组 $ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解的充要条件是秩 (AB) = 秩 (B).

四. (20 分) λ 取何值时, 方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$

(1) 无解, 有唯一解, 有无穷多解.

(2) 有无穷多解时, 求出方程组的通解.

五. (20 分) 已知二次曲面 $x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2bx_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 4$, 可以经正交变换 $x = Ty$, 化为椭圆柱面方程 $y_2^2 + 4y_3^2 = 4$, 求 a, b 的值和正交矩阵 T.

六. (12 分) P 是数域, $P^{n\times n}$ 关于矩阵加法和数乘运算构成线性空间,

$V_1 = \{A|A \in P^{n\times n}, A' = A\}$

(1) 证明 V_1 是 $P^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 求 $P^{n\times n}$ 的子空间 V_2, 使 $P^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$.

七. (20 分) 设 $V = P^{2\times 2}$ 表示数域 P 上 2 级方阵全体按照矩阵加法和数乘运算构成的线性空间, 定义 V 的一个变换 T 为: $T(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A, A \in V$

(1) 证明 T 是线性变换.

(2) 求 T 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵 M. 其中, E_{ij} 的第 i 行第 j 列元素为 1, 其余元素为 0.

(3) 求 T 的值域 TV, 给出 TV 的维数和一组基.

(4) 求 T 的核 $T^{-1}(0)$, 给出 $T^{-1}(0)$ 的维数和一组基.

八. (12 分) (1) 设 λ_1, λ_2 是线性变换 T 的两个不同特征值, ε_1, ε_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明: $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 不是 T 的特征向量;

(2) 证明: 如果 n 维线性空间 V 的线性变换 T 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量, 则 T 是数乘变换.

九. (12 分) 在复数域上求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ 的有理标准形和 Jordan 标准形.

十. (12 分) 设三阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 对应于 λ_1 的特征向量 $\xi_1 = (0, 1, 1)'$.

(1) 求矩阵 A 属于 λ_2, λ_3 的特征向量 ξ_2, ξ_3; (2) 求矩阵 A.