

机密★启用前

## 青岛理工大学 2008 年硕士研究生入学试卷

考试科目代码: \_\_\_\_\_ 702 \_\_\_\_\_

考试科目名称: \_\_\_\_\_ 数学分析 \_\_\_\_\_

考生注意: 1. 答题必须写清题号, 所有答案均须写在答题纸(本)上, 写在试题卷、草稿纸上的答案无效; 2. 考毕时将试题和答题纸(本)一同上交。

一(13分). 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , 其中

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}, n = 1, 2, \dots, x_1 > 0, a > 0.$$

二. 证明: 若  $\alpha > 0, \xi \in (0, 1), \alpha\xi > 1$ , 则超越方程  $e^x - e^{-x} = \alpha(e^{\xi x} - e^{-\xi x})$  在区间  $(0, +\infty)$  内恰有一个解(13分).

三. 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内二阶可导, 且满足

$$\begin{cases} f''(x) = f^3(x) - f(x), x \in (a, b), \\ \max\{|f(a)|, |f(b)|\} \leq 1. \end{cases}$$

证明:  $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [a, b]$ (13分).四. 设  $f$  在  $[0, 2\pi]$  上为递减函数, 则对任何正整数  $n$  有(13分)

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \geq 0.$$

五. 计算积分  $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$ (14分).六. 设  $\alpha, \beta$  为实常数. 研究正项级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$  收敛的充要条件(14分).七. 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$  的和函数, 以及数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$  的和(14分).

八. 研究二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

在原点  $(0, 0)$  处的连续性和可微性(13分).

九(13分). 求函数  $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$  在三角形区域  $D: x + y \leq 2\pi, x \geq 0, y \geq 0$  上的最大值和最小值.

十. 求由曲面  $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2})^3 = \frac{xyz}{abc}$  所围立体的体积, 其中常数  $a > 0, b > 0, c > 0$ (15分).

十一. 证明非正常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  收敛并求其值(15分).