机密★启用前

青岛理工大学2009年硕士研究生入学试题

考试科目代码： 816

考试科目名称： 高等代数

考生注意：1. 答题必须写清题号，所有答案均须写在答题纸（本）上，写在试题、草稿纸上的答案无效；2. 考毕时将试题和答题纸（本）一同上交。

一. (36 分) 填空 (每题 6 分)

1. n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix} =$________.

2. 设方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解，则 a=________.

3. 设 A 是任一 $n(n \geq 2)$ 阶方阵， A^* 是其伴随矩阵，又 k 为常数 $(k \neq 0, \pm 1)$，则必有 $(kA)^* =$________.

4. 若二次型 $f(x_1, x_2\ x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2tx_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是________.

5. 已知 4 阶矩阵 A 相似于 B, A 的特征值为 2, 3, 4, 5, E 为 4 阶单位阵， 则 $|B-E|$=________.

6. 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形为________.

二. (10 分) 已知 4 阶方阵 A 满足条件 $|3E+A|=0$, $AA'=2E$, $|A|<0$, 求 A^* 的一个特征值. (其中, E 为 4 阶方阵， A' 为 A 的转置矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵).

三. (18 分) λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$

(1) 无解，有唯一解，有无穷多解.

(2) 有无穷多解时，求出方程组的通解.

四. (14 分) $B \in R^{n\times n}$, $x' = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 证明：方程组 $Bx = 0$ 只有零解的充要条件是 $B'B$ 正定. (x', B' 分别表示向量 x 和矩阵 B 的转置)

五. (20 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_2x_3, (a > 0)$ 可以经过正交变换 $x = Ty$ 化为标准形 $f = y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$.

(1) 求二次型矩阵的行列式 $|A|$.

(2) 求参数 a 以及正交变换阵 T.

六. (18 分) P 是数域， $P^{n\times n}$ 关于矩阵加法和数乘运算构成线性空间,
$V_1 = \{A|A \in P^{n\times n}, A' = A\}$

(1) 证明 V_1 是 $P^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 求 $P^{n\times n}$ 的子空间 V_2, 使 $P^{n\times n} = V_1 \oplus V_2$.

七 . (20 分) 设 T 是 $R^3 \to R^3$ 的一个线性变换，且 $T(x, y, z) = (0, x, y)$

(1) 求 T^2 的象 $T^2(R^3)$ 与核 $(T^2)^{-1}(\vec{0})$.

(2) 求变换 T , T^2 的特征多项式.

(3) 求 TV 的一组基和维数 $dimTV$.

(4) 求 T 的核 $T^{-1}(\vec{0})$ 的一组基和维数 $dimT^{-1}(\vec{0})$.

八. (14 分) 设 $V = \{A|A' = A, A \in R^{n\times n}\}$, 定义 $(A, B) = trAB$, A, $B \in V$ (其中， $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$)

(1) 证明 V 关于 (A, B) 构成欧氏空间.

(2) 求 V 的一组基和 V 的维数.