机密★启用前

青岛理工大学2010年硕士研究生入学试题

考试科目代码：812

考试科目名称：高等代数

考生注意：1. 答题必须写清题号，所有答案均须写在答题纸（本）上，写在试题、草稿纸上的答案无效；2. 考毕时将试题和答题纸（本）一同上交。

一、（15分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 3 & 4 & & & & \\ -1 & 3 & 4 & & & \\ & -1 & 3 & 4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 3 & 4 \\ & & & & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

二、（20分）已知A,B为$n\times n$可逆矩阵$(n\geq 2)$，A^*为A的伴随矩阵，A^{-1}为A的逆矩阵，$|A|$为A的行列式，A'为A的转置矩阵，E为n阶单位矩阵。

（1）如果A,B可交换，证明A和B逆矩阵的转置矩阵可交换.

（2）证明：$AA^*=|A|E$，$|A^{-1}|=|A|^{-1}$

（3）证明：$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$.

（4）证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

三、（10分）已知A,B为$m\times n$矩阵，证明：$R(A+B)\leq R(A)+R(B)$其中，$R(A)$，$R(B)$表示矩阵A,B的秩.

四、（20分）已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

（1）a，b取何值时方程组有解.

（2）在有解的情况下求方程组的一般解.

五、（20 分）已知二次型 $f(x,y)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$，$a>0$ 可经过正交变换 T 化为标准形，$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

（1） 求参数 a.

（2） 求正交变换 T.

六、（12 分）设 $f=X'AX$，$g=X'BX$ 是两个实二次型，其中，B 正定，证明：

（1） 存在可逆线性变换 $X=TY$ 使 $\begin{cases} f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2 \\ g=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2 \end{cases}$，

其中，$\begin{cases} X'=(x_1, & x_2, & \cdots, & x_n) \\ Y'=(y_1, & y_2, & \cdots, & y_n) \end{cases}$

（2） 标准形 $f=\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2+\cdots+\lambda_n y_n$ 中的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为多项式：$|\lambda A-B|=0$ 的根.

七、（18 分）已知 $P^{n\times n}$ 是数域 P 上 n 阶方阵的全体，且关于矩阵加法与数乘运算构成线性空间.

$C(A)=\{X \mid X\in P^{n\times n},\ \ AX=XA\}$ 表示与矩阵 A 可交换的 n 阶方阵的集合.

（1） 证明：$C(A)$ 关于矩阵加法与数乘运算构成 $P^{n\times n}$ 的线性子空间.

（2） 如果 $A=E$（n 阶单位阵），求 $C(A)$

（3） 如果 $A=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$，求 $C(A)$ 的维数和一组基.

八、（20 分） 设 $V=\{A \mid A\in R^{2\times 2}\}$ 是 2 阶实矩阵全体按矩阵加法与数乘构成的线性空间，$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in V$

定义 V 上的变换：$Tx=xM-Mx$，$\forall x\in V$.

（1） 证明：T 是 V 上的线性变换.

（2） 求线性变换 T 在基

$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$下的矩阵$C$.

（3） 求线性变换T的值域 TV以及TV的一组基.

（4） 求线性变换T的核 $T^{-1}(0)$以及$T^{-1}(0)$的一组基.

九、（15 分） 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$n$维欧几里得空间$V$的一组标准正交基，$T$是$V$上的线性变换，$A$是线性变换$T$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵，即$T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$.

如果内积 $(T\alpha,\beta)=(\alpha,T\beta)$, $\alpha,\beta\in V$，称T是V上的对称变换;

如果内积 $(T\alpha,T\beta)=(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in V$，称T是V上的正交变换;

注：如果 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x$， $x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y$， $y'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

$(\alpha,\beta)=x'y$