机密★启用前

青岛理工大学2010年硕士研究生入学试题

科目代码：361　科目名称：数学分析

注意事项：1. 答题必须写明题号，所有答案必须写在答题纸上。写在试题、草稿纸上的答案无效；2. 考毕时将试题和答题纸一同上交。

1. 求数列极限: (15 分)

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$　　(2). $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}})$

2. 证明:若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续,且 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 存在,则它可取到介于 $f(a+)$ 和 $f(b-)$ 之间的一切中间值. (15 分)

3. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且在 $x=0$ 的某个领域上成立 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的的无穷小量. 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 的切线方程. (15 分)

4. 证明 (Darboux) 定理， 设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上可导，$x_1,x_2\in(a,b)$. 如果 $f'(x_1)f'(x_2)<0$,证明在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ ,使得 $f'(\xi)=0$.(15 分)

5. 证明:设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续,且单调减少,证明对任意 $\alpha\in[0,1]$,成立 $\int_0^\alpha f(x)dx\ge\alpha\int_0^1 f(x)dx$. (15 分)

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导,且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty}f'(x)dx$ 都收敛,证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.(15 分)

7. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, (15 分)

a) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛,并求其和;

b) 进一步设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶可导,且 $f''(x)<0$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f'(n)$ 收敛.

8. 设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数.在极坐标 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 变换下,求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 关于极坐标的表达式. (15 分)

9. 设 $a_1, a_2, ..., a_n$ 为 n 个已知正数.求 n 元函数 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ 在约束条件 $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \le 1$ 下的最大值与最小值. (15 分)

10. 计算第二类曲线积分 $\int_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 其中 L 为一条不经过原点的简单闭曲线. (15 分)