

机密★启用前

青岛理工大学 2011 年硕士研究生入学试题

科目代码: 601 科目名称: 数学分析

注意事项: 1. 答题必须写明题号, 所有答案必须写在答题纸上。写在试题、草稿纸上的答案无效; 2. 考毕时将试题和答题纸一同上交。

1. 设 $x_n = a_0 + a_1q + a_2q^2 + \cdots + a_nq^n, (|q| < 1, |a_k| < M, k = 1, 2, \dots, n)$, 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛. (15 分)
2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. (15 分)
3. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可以取到最大值和最小值. (15 分)
4. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上连续, 且满足 $f(x^2) = f(x), x \in (0, +\infty)$ 。证明 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为常值函数. (15 分)
5. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续 ($ab > 0$), 在开区间 (a, b) 上可导. 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $\frac{1}{b-a} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi f'(\xi) - f(\xi)$. (15 分)
6. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 0$ 且 $f'(0)$ 存在。证明: $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{f(x)} = 1$. (15 分)
7. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和. (15 分)
8. 计算 $I = \int_{\ln 2}^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$. (15 分)
9. 证明: $z = e^{-kn^2x} \sin(ny)$ 满足热传导方程: $\frac{\partial z}{\partial x} = k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (15 分)
10. 计算 $\int_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, 其中 L 是以 $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$ 为顶点

的三角形边界, 方向为逆时针方向。(15 分)