

机密★启用前

青岛理工大学 2012 年硕士研究生入学试题

考试科目代码: 601

考试科目名称: 数学分析 (B 卷)

考生注意: 1. 答题必须写清题号, 所有答案均须写在答题纸 (本) 上, 写在试题、草稿纸上的答案无效; 2. 考毕时将试题和答题纸 (本) 一同上交。

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ (有限数)。证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上为有界函数。(15 分)
2. 应用闭区间套定理证明闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数的零点存在定理。(20 分)
3. 求函数的 $y = (3x^2 - 2)\sin 2x$ 的 100 阶导数。(15 分)
4. 已知 $\begin{cases} xu + yv = 0 \\ yu + xv = 1 \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 。(15 分)
5. 已知一组点 $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n+1\}$, 写出 n 次多项式 $p_n(x)$ 的表达式使 $p_n(x_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ 。(15 分)
6. 设 f 是 R^n 上的连续函数, 满足
 - (1) 当 $X \neq 0$ 时, 成立 $f(X) > 0$
 - (2) 对于任意 X 及 $c > 0$, 成立 $f(cX) = cf(X)$
 证明: 存在 $a > 0, b > 0$, 使得 $a|X| \leq f(X) \leq b|X|$ 。(20 分)
7. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 。(15 分)
8. 计算 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ 。其中 L 为一条不经过原点的简单闭曲线, 方向为逆时针方向。(20 分)

9. 证明 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ 当 $s > 0$ 时收敛且 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 。(15 分)