(装 订 线)

机密★启用前

# 青岛理工大学2012年硕士研究生入学试题

科目代码：812　科目名称：高等代数

注意事项：1. 答题必须写明题号，所有答案必须写在答题纸上。写在试题、草稿纸上的答案无效；2. 考毕时将试题和答题纸一同上交。

一、（12分）计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+ab & b & & & \\ a & 1+ab & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & 1+ab & b \\ & & & a & 1+ab\end{vmatrix}$$

二、（24分）证明下列各题

1、设$A$是$n$阶非零实方阵，如果$A'=A^*$，则$|A|\neq 0$.

（其中$A^*$是$A$的伴随矩阵，$A'$是$A$的转置矩阵.）

2、已知$A$是$n$阶正交矩阵，$E$是$n$阶单位矩阵，$|A|<0$　证明：$|A+E|=0$.

3、已知向量$\beta$可由向量组$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_m$线性表示，证明：表示唯一的充分必要条件是向量组$\alpha_1$，$\alpha_2,\cdots$，$\alpha_m$线性无关.

4、已知$\eta_1$，$\eta_2,\cdots$，$\eta_t$是线性方程组$Ax=b$的解，证明：$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$是$Ax=b$的解当且仅当$k_1+k_2+\cdots+k_t=1$.

（其中，$A\in P^{s\times n}$，$x\in P^n$，$b\in P^s$）

5、已知$A,B$为$m\times n$矩阵，证明：$R(A+B)\leq R(A)+R(B)$

（其中，$R(A)$，$R(B)$表示矩阵$A,B$的秩）

三、(18 分)已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 3x_1+4x_2-x_3+4x_4=-1 \\ 2x_1+x_2-4x_3+6x_4=a-9 \\ 3x_1+4x_2-x_3+4x_4=-1 \end{cases}$

1、 $a$取何值时方程组有解.

2、 在有解的情况下求方程组的一般解.

四、(18 分)用正交变换将二次型 $f(x,y)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$ 化为标准形，并判定$f(x,y)=3$表示何种二次曲面.

五、(12 分)已知线性空间$R^3$中有两组基，

A 组：$\bar{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\bar{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\bar{\alpha}_3=(1,1,2)$

B 组：$\bar{\beta}_1=(1,2,1)$，$\bar{\beta}_2=(-1,0,2)$，$\bar{\beta}_3=(2,3,4)$

求 A 组到 B 组的过度矩阵$C$，并求$R^3$中向量$\bar{\xi}=(1,3,2)$在 A 组基下的坐标$\bar{x}$.

六、(20 分)已知$R^3$是实数域$R$上 3 维向量的全体，且关于向量加法与数乘运算构成线性空间.

$V_1=\{\bar{x}\mid \bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3,\quad x_1+x_2+x_3=0\}$

$V_2=\{\bar{x}\mid \bar{x}=(x_1,x_2,x_3)\in R^3,\quad x_1=x_2=x_3\}$

1、 证明：$V_1$，$V_2$ 均为线性空间$R^3$ 的子空间.

2、 分别求出$V_1$、$V_2$的一组基和维数$\dim V_1$、$\dim V_2$.

3、 证明：$R^3=V_1+V_2$，且 $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$，其中$\oplus$表示直和.

七、（20 分）设$V=\{x \mid x\in R^{2\times 2}\}$是 2 阶实矩阵全体按矩阵加法与数乘构成的线性空间，$M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\in V$　定义$V$上的变换：$Tx=Mx$，$\forall x\in V$.

1、 证明：$T$是$V$上的线性变换.

2、 求线性变换$T$在基.

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$下的矩阵$C$.

3、 求线性变换$T$的值域 $TV$ 以及$TV$ 的一组基.

4、 求线性变换$T$的核 $T^{-1}(0)$ 以及$T^{-1}(0)$的一组基.

八、（12 分）在复数域上求矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$的行列式因子，不变因子，初等因子和 Jordan 标准形.

九、（14 分）已知全体实对称矩阵 $V=\{A \mid A'=A,\quad A\in R^{3\times 3}\}$，是3阶实矩阵空间$R^{3\times 3}$的子空间，定义二元实函数$(A,B)=tr(AB)$，$A$，$B\in V$.

（其中$tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}$为矩阵$A$的迹.）

1、证明$V$关于$(A,B)$构成欧几里得空间.

2、求子空间$V$的基与维数.