青 岛 科 技 大 学

二OO八年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

注意事项：1．本试卷共9道大题（共计 9个小题），满分150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

*

一．（20分）

设 $f(x)$ 具有二阶导数且满足

$$f(x)\le\frac{1}{2}[f(x-h)+f(x+h)]$$

试证 $f''(x)\ge 0$.

二．（20分）

设 $a_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}(n=1,2,\cdots)$，判定数列 $\{a_n\}$ 的敛散性, 若该数列收敛, 求其极限 $\lim a_n$.

三．(10分)

证明：一个数列 $\{a_n\}$ 如果不是无穷大量，则它一定有收敛的子列.

四．（10分）

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为一收敛的正项级数，$\{a_n-a_{n+1}\}$ 单调递减，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty$$

五．（20分） 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=0$

六．（20分） 求证：$f(x,y)=yx^y(1-x)<e^{-1}$，$0<x<1$，$0<y<\infty$.

七．（20分）

计算曲面积分

$$I=\iint_S zdS$$

其中 S 是曲面 $x^2+z^2=2az(a>0)$ 被曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所截取的有限部分

八． （15 分）

$$证明: \int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx \text{ 在 } \alpha\in[\alpha_0,+\infty) \text{ 一致收敛，其中 } \alpha_0>0$$

九． （15 分）证明:

$$\oint_l \frac{\cos(r,n)}{r}ds=0$$

其中 l 是一单连通区域 σ 的边界, 而 r 是 l 上的一点到 σ 外某一定点的距离. 若 r 表示 l 上的一点到 σ 内某一定点的距离, 那末这积分之值等于 2π .