青 岛 科 技 大 学

二 O 一一年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

注意事项：1．本试卷共 7 道大题（共 7 道小题），满分 150 分；
2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3．必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

* *

一（20 分）

证明两个数字矩阵 A, B 相似的必要条件是它们有相同的特征多项式和相同的最小多项式.

二（20 分）

设 A , B , C 为任意三个矩阵, 乘积 ABC 有意义, 求证：

$$r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$$

三（20 分）

A, B 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵, 证明 $\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|$.

四（20 分）

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{'}AX$ 为 n 元实二次型,如果有两个向量 X_1, $X_2\in R^n$, 使

$f(X_1)>0, f(X_2)<0$. 证 明 存 在 两 个 线 性 无 关 的 向 量 $Y_1,Y_2\in R^n$, 使

$f(Y_1)=f(Y_2)=0$.

五（20 分）

设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 V 的线性变换，且 $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$，证明：

1) 如果 λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值，那么 V_{λ_0}（特征子空间）是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间；

2) $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 至少有一个公共的特征向量。

六（20 分）

求矩阵 $A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$ 的不变因子。

七（30 分）

设 V 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是一若尔当块。证明：

1) V 中包含 ε_1 的 $\mathcal{A}$ 不变子空间只有 V 自身；

2) V 中任一非零 $\mathcal{A}$ 不变子空间都包含 ε_n；

3) V 不能分解成两个非平凡的 $\mathcal{A}$ 不变子空间的直和。