

青 岛 科 技 大 学

二〇一二年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

- 注意事项：1. 本试卷共 9 道大题（共计 9 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或签字笔答题，其它均无效。

一 (20 分) 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在（有限），则函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 一致连续.

二(20 分) 证明：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛.

三(20 分) 设函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的邻域连续， $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy$

$$\text{求 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{t}.$$

四(20 分) 设 $f(x, y)$ 在区域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 连续，函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a, A]$ 一致收敛且满足 $b \leq \varphi_n(x) \leq B (n=1, 2, \dots)$ ，证明：函数列 $F_n(x) = f(x, \varphi_n(x))$ 也在 $[a, A]$ 一致收敛.

五 (15 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}$.

六 (15 分) 证明：对任意的实数 a 和 b ，成立

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

七 (15 分) 计算对坐标的曲线积分 $\int_L (x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy$, 其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点(0,0)到点(1,1)的一段弧.

八(15 分) 利用斯托克斯(Stokes)公式, 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} 2ydx + 3xdy - z^2dz$, 其中闭曲线 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0$, 若从 z 轴正向看去, 这圆周是取逆时针方向.

九 (10 分) 计算对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} xyzdxdy,$$

其中积分曲面 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1(x \geq 0, y \geq 0)$ 的外侧.