题纸（本）上做题，在此试卷及草稿纸上做题无效！

山东科技大学2004年招收硕士学位研究生入学考试

高等代数试卷

（共2页）

一、（20分）设 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 为三个多项式，并且 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$

证明：

1、$(f(x),g(x))=1$

2、$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$

二、（20分）假设 $f(x)=x^2-x-7$，A 为 n 阶方阵，且 $f(A)=0$

1、证明 $A+2E$ 可逆，并求 $(A+2E)^{-1}$（其中 E 为单位矩阵）

2、将矩阵 A 的第 i 与 j 列交换后得到矩阵B，证明B可逆，并求 $B^{-1}A$

三、（25分）当a取何值时下列方程组有唯一解；有无穷多解；无解？当有解时，请求之。

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ (a+1)x1+(a+1)x2+2x_3=2 \\ (2a+1)x_1+3x_2+(a+2)x_3=3 \end{cases}$$

四、（15分）设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶非零实方阵，并且 $a_{ij}=A_{ij},i,j=1,2,\cdots,n,$ 其中 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式，

1、证明 A 可逆。

2、求 $|A|$

五、（20分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，

1、求二次型 $f=X^TAX$（X^T 为 X 的转置）

2、用正交换化二次型 f 为标准型

3、二次型 f 是否为正定二次型

六、（15 分）设σ为线性空间 V 上的线性变换，$a\in V$，若$\sigma^{k-1}(a)\neq 0$，但$\sigma^{k}(a)=0$，试证

$\alpha,\sigma(a),\cdots,\sigma^{k-1}(a)$ 线性无关。

七、（20 分）设 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的各阶行列式因子，不变因子及初等因子，写出矩阵 A 的 *Jordan* 标准形。

八、（15 分）σ_1,σ_2 为 n 维欧氏空间 V 上的对称变换，且$\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$，证明：

1、若λ_0是σ_1的特征值，则特征子空间V_{λ_0}为σ_2的不变子空间。

2、σ_1,σ_2至少有一个公共特征微量 。

3、设 A，B 在σ_1,σ_2在同一组标准正交基下的矩阵，试证：存在正交矩阵 Q，使得 Q^TAQ 与 Q^TBQ 同时为对角形矩阵（QT 为 Q 的转置矩阵）