

在答题纸（本）上做题，在此试卷及草稿纸上做题无效！

山东科技大学 2004 年招收硕士学位研究生入学考试

线性代数试卷

（共 2 页）

一、（20 分，每小题 10 分）计算下列行列式

$$(1) D_1 = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \quad (2) D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

二、（20 分，每小题 10 分）判断下列各向量组是否线性相关

$$(1) a_1 = (2, 1), a_2 = (-1, 4), a_3 = (2, -3)$$

$$(2) a_1 = (2, 1, 1), a_2 = (1, 2, -1), a_3 = (-2, 3, 0)$$

三、（15 分）求下列向量组的极大无关组与秩

$$a_1 = (6, 4, 1, -1, 2), a_2 = (1, 0, 2, 3, -4)$$

$$a_3 = (1, 4, -9, -16, 22), a_4 = (7, 1, 0, -1, 3)$$

四、（20 分，每小题 10 分）求满足下列等式的方阵 X

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; (2) X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

五、（15 分）讨论当 a, b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

（1）有唯一解；（2）有无穷多解；（3）无解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

的基础解系与通解。

六、(15 分) 证明: 如果 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_l$ 是一线性方程组的解, 则 $u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \dots + u_l\eta_l$ ($u_1 + u_2 + \dots + u_l = 1$)

也是它的解。

七、(15 分) 证明: 如果方阵 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 则方阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 相似。

八、(15 分) 求正交矩阵 Q , 使 $Q^T A Q$ 成为对角形

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

九、(15 分) 求齐次线性方程组

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

的基础解系与通解。

