）上做题，在此试卷及草入纸上做题无效！

山东科技大学2005年招收硕士学位研究生入学考试

高等代数试题

（共 2 页）

一.（共70分，每小题14分）

1．试确定A，B，使得$x-1$是多少项式

$$f(x)=Ax^{n+1}+Bx^{n}+1(n>1)$$

的二重因式。

2．证明方阵A的最小多项式是唯一的。

3．证明实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

为正定二次型

4．已知$a_1a_2\cdots a_s$的秩为$r(r>0)$，证明：$a_1a_2\cdots a_s$中任意r个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组。

5．设T是R^2的一个线性变换，向量

$a_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$在变换T下的像是

$Ta_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},Ta_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$，试求：T在基

$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$下的矩阵。

二.（20 分）设 A 是 n 级方阵，证明：存在一个 n 级方阵 $B \neq 0$ 使 $AB = 0$ 的充分必要条件是 $|A| = 0$ 。

三.（20 分）$M_n(F)$ 表示数域 F 上的全体 n 级方阵构成的线性空间，试证：

1. N 级对称矩阵的集合 W_1 和 n 级反对称矩阵的集合 W_2 都是 $M_n(F)$ 的线性了空间；

2. $M_n(F) = W_1 \oplus W_2$

四.（20 分）设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

求 A^k（其中 k 为正整数）

五.（20 分）设 V 是欧氏空间，W_1 与 W_2 是 V 的两上子空间试证：

1. 若 $W_1 \subseteq W_2$,则 $W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$；

2. 当 V 是有限维时，若 W_1 是 $A-$子空间，则 $W_1^{\perp}$ 是 $A-$子空间，其中 A 是 V 上的任一正交变换。