

) 上做题, 在此试卷及草入纸上做题无效!

# 山东科技大学 2005 年招收硕士学位研究生入学考试

## 线性代数试卷

(共 2 页)

一、(20 分, 每小题 10 分) 计算下列行列式

$$(1) D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$(2) D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

二、(16 分) 设  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,

且矩阵 A 满足关系式  $W - C^{-1}B)C' = E$ , 求 A。

三、(30 分, 每小题 15 分) 证明题

(1) 设 A 为 n 阶方阵,  $B = \frac{1}{2}(A + E)$ , 试证  $B^2 = B$  的充要条件是  $A^2 = E$ 。

(2) 假设 A 与 B 都可逆, 度证  $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$  可逆, 并且  $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ 。

四、(24 分, 每小题 6 分) 设  $a_1 = (0, 0, -1, 1)$ ,  $a_2 = (1, 1, -1, 0)$ ,  $a_3 = (-1, -1, 0, 0)$ ,

$a_4 = (0, 0, -1, 0)$ ,  $a_5 = (0, 0, 1, -1)$ 。

- (1) 判断  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  的线性相关性, 若线性相关, 求出相关系数;
- (2) 求秩  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  及秩  $(a_3, a_4, a_5)$ ;
- (3) 判断  $a_1, a_2, a_3$  及  $a_1, a_2, a_4$  的线性相关性;
- (4) 求  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  的全部极大无关组。

五、(15 分) 求  $a$ , 使线性方程组

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 &= a \end{aligned} \right\}$$

有解, 并求解。

六、(15 分) 设矩阵  $A$  为:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

求  $A$  的特征值与特征向量。

七、(15 分) 设  $A$  为正交矩阵, 且  $|A|=1$ , 试证:  $A$  的每一个元素都等于它自己的代数余子式。

八、(15 分) 设二次型  $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  是正定的, 试确定  $t$  的取值范围。

考和

