

401 高等代数

一、(10 分) 求下列行列式的值。

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

二、(20 分)

1、设 $f(x) = x^2 + x - 2$, A 为 n 阶方阵, 且 $f(A) = 0$, 证明矩阵 A 与矩阵 $A - 2E$ 可逆, 并求 $(A - 2E)^{-1}$ (其中 E 为单位矩阵)。

2、将矩阵 A 的第 i 列与第 j 列交换得到矩阵 B , 试证矩阵 B 可逆, 并求 $B^{-1}A$ 。

三、(25 分)

1、设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 线性表示, 且二向量组有相同的秩, 试证二向量组等价。

2、设 A, B 为 n 阶方阵, 满足 $ABA = B^{-1}$, 证明:

$$\text{rank}(E - AB) + \text{rank}(E + AB) = n$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵, $\text{rank}()$ 表示矩阵的秩。

四、(20 分) 当参数 λ 取何值时下列方程组有唯一解? 有无穷多解? 无解? 当有无穷多解时, 请求之。

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

五、(20 分) 设二次型 $f = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 10x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

1、用正交变换化二次型 f 为标准型

2、二次型 f 是否为正定二次型?

六、(20 分)

1、如果 $(f(x), g(x)) = 1$ ，且 $f(x) | g(x)h(x)$ ，那么 $f(x) | h(x)$ 。

2、如果 $p(x)$ 是不可约多项式，那么对于任意的两个多项式

$f(x), g(x)$ ，由 $p(x) | f(x)g(x)$ 一定推出 $p(x) | f(x)$ 或者

$p(x) | g(x)$ 。

七、(15 分) 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个非平凡线性子空间，试证：

在 V 中存在向量 α 使得 $\alpha \notin V_1$ 且 $\alpha \notin V_2$ 。

八、(20 分) 设 V 是 n 维欧氏空间，

1、 $\alpha, \beta \in V$ ，如果对任一 $\gamma \in V$ 有 $(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta)$ ，则

$\alpha = \beta$ 。

2、 σ 为 V 上的线性变换，证明存在 V 上唯一的线性变换

σ^* ，使得对任意的 $\alpha, \beta \in V$ ，有下式成立：

$(\sigma(\alpha), \beta) = (\alpha, \sigma^*(\beta))$ 。