山东科技大学2007年招收硕士学位研究生入学考试

高等代数试卷

一、(20分) 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

解矩阵方程 $A+X=XA$。

二、(20分)

1、 将所有4级矩阵按相似关系进行分类后（即相似的矩阵划分为一类），特征多项式为 $\boldsymbol{f}(\lambda)=(\lambda-\boldsymbol{a})(\lambda-\boldsymbol{b})^3$ 的4级矩阵占几类？每类各写出一个代表矩阵。

2、 证明n级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 相似。

三、(30分) 设 $\boldsymbol{A}$ 为n级全1矩阵（即矩阵的每个元素都是1），

1．求 A 的特征多项式及最小多项式；

2、矩阵 A 能否对角化？若能，请求出可逆矩阵 B 使 $B^{-1}AB$ 为对角矩阵。

四、(30分) 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是n级正定矩阵，求证：

1、 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是正定矩阵；

2、 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵；

3、当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时， $\boldsymbol{AB}$ 也是正定矩阵。

五、(20 分) 设 $\boldsymbol{T}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上 $\boldsymbol{n}$ 维线性空间 V 上的一个线性变换，在多项式环 $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]$ 中， $f(x)=g(x)h(x)$，且 $g(x)$ 与 $h(x)$ 互素，符号 $\sigma^{-1}(\theta)$ 表示线性变换 σ 的核，试证：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{T})^{-1}(\theta)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{T})^{-1}(\theta)\oplus\boldsymbol{h}(\boldsymbol{T})^{-1}(\theta).$$

六、(30 分)

1、 设 $\boldsymbol{T}$ 是内积空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个线性变换，证明：$\boldsymbol{T}$ 是正交变换的充要条件为 $\boldsymbol{T}$ 保持任意两向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的距离不变，即

$$|\boldsymbol{Tx}-\boldsymbol{Ty}|=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

2、 设 $\boldsymbol{T}$ 是内积空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个变换，证明：若 $\boldsymbol{T}$ 保持任意两向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的内积不变，即 $(\boldsymbol{Tx},\boldsymbol{Ty})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，则 $\boldsymbol{T}$ 一定是一个线性变换，从而是正交变换。

3、内积空间的保持距离不变的变换是否一定是线性变换？若一定是，请证明；若不一定是，请举反例。