一、计算（20 分）

1．求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

2. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\int_0^{x^2}\cos(t^2)dt}{\sin^{10}x}$

3．计算不定积分：$\int x^x(1+\ln x)dx$

4. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $2x-\int_1^y e^{-t^2}dt=xy$ 所确定的隐函数，求 y' 及 $y'(0),\, dy|_{x=0}$ 。

二、应用（15 分）

在抛物线 $y=-x^2+1\ (0<x\le 1)$ 上所经过的第一象限内找一点 $M(\xi,\eta)$，过 M 点作该抛物线的切线，使由此切线与抛物线及两坐标轴所围成的图形面积最小。

三、证明（15 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，满足 $0<f(x)<1$, 且 $f'(x)\ne 1\,(0<x<1)$ 。

证明：在 $(0,1)$ 内有且仅有一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$ 。

四、综合（15 分）

设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b](a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$ （A 为常数）。

(1) 证明：$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx;$

（2）计算：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$ 。

五、一致连续（10 分）

设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且有斜渐近线，即有数 b 与 c，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-bx-c]=0$。证明 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

六、幂级数与和函数：（14 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛区间、收敛半径及和函数。

七、偏导数：（10 分）

已知变换 $\xi = x+ay,\quad \eta = x+by$，

试将方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$，求 a,b 的值。

八、含参量积分：（15 分）

1．证明：$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{xt}{1+x^6t^2}dx$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

2．计算：$\displaystyle\int_1^{\infty}e^{-t}\frac{\sin xt}{t}dt$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

九、曲线积分：（18 分）

1．计算曲线积分：$\displaystyle\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$，其中 L 为螺线 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$，在 $t\in[0,2\pi]$ 的一段。

2．计算 $\displaystyle\oint_L \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为逆时针曲线 $x^2+y^2=a^2$。

十、重积分与曲面积分：（18 分）

1．计算：$\displaystyle\iint_D |\cos(x+y)|\,dxdy$，其中 $D=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\pi]$。

2．计算：$\iint\limits_{S} xyzdxdy$，式中的 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧在 $x \ge 0,\quad y \ge 0$ 的部分。