一、计算题（每小题 15 分，共 30 分）

计算 n 级行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$，求 X 使 $XA=B$。

二、(15分) 讨论 a,b 取何值时下方程组有解，并求其解：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

三、(15 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$，求 A 的不变因子，初等因子和若当标准形。

四、(20 分) 用正交线性变换 $X=TY$ 化二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 为标准型。

五、(15 分) 设 $f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)$ 都是数域 F 上的多项式，其中 $f_1(x)\neq 0$ 且 $f_1(x)f_2(x)$ 能被 $g_1(x)g_2(x)$ 整除，而 $g_1(x)$ 能被 $f_1(x)$ 整除，证明 $f_2(x)$ 能被 $g_2(x)$ 整除。

六、(15 分) 设线性空间 V 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s (s>2)$ 线性无关，讨论向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1}+\alpha_s,\alpha_s+\alpha_1$ 是否线性无关？

七、(20 分) 设 σ_1 与 σ_2 是 n 维欧氏空间 V 上的对称变换，且 $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$，证明：

1. 若 λ 是 σ_1 的特征值，则特征子空间 V_λ 为 σ_2 的不变子空间；2. σ_1,σ_2 至少有一个公共特征向量。

八、(20 分) 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间，T 是 V 上的一个线性变换，且满足 $(T-E)(T-2E)=O$（其中 E 和 O 分别表示 V 上的单位变换和零变换），用 V_1，V_2 分别表示 $T-E$ 及 $T-2E$ 的核空间，试证明：$V=V_1\oplus V_2$。