一．求极限（20 分）：

1、曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{nf(\frac{2}{n})}=\sqrt{2}$ 。

2、求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)$。 3、求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}[1-\cos(t^2)]dt}{\sqrt{x^5}}$ 。

4、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n^3}}\right)$。

二．导数及高阶导数（20 分）：

1、设 $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[5]{x}}}$ ，求 y' 。 2、已知 $y=\frac{x^4}{1-x}$ ，求 $y^{(n)}\quad (n>4)$ 。

3、由方程 $x+y^2=\int_0^{y-x}\cos(t^2)dt$ 确定了 y 是 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

4、设 $x=f'(t),\ y=tf'(t)-f(t)$ ，$f'''(t)$ 存在且 $f''(t)$ 不为零，求三阶导数 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 。

三．证明题（17 分）：

1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]\quad (a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导。

证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$。

2、证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1\ \ (n\geq 2)$ 在 $(0,1)$ 内必有惟一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 。

四．积分计算（18 分）：

1、计算不定积分：$\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$ 。

2、计算定积分：$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$ 。

3、讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}\quad (\alpha>0)$ 的敛散性，若收敛，求出其值。

五． 解下列各题（30 分）

1、设 $z=f(x^2+y^2)$ ，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2、计算积分 $\int_l (x+y)ds,\quad l:$ 顶点为 $(0,0),\ (1,0),\ (1,1)$ 的三角形边界。

3、计算积分$\iint_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$，$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在平面$z=4$下方的部分，取外法线方向。

六． 解下列各题（20 分）

1、计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \quad (b>a>0)$。

2、假设$f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中$\varphi(x,y)$在点（0，0）的邻域中连续，问

1）$\varphi(x,y)$满足什么条件时，$f(x,y)$在（0，0）点偏导数存在；

2）$\varphi(x,y)$满足什么条件时，$f(x,y)$在（0，0）点可微。

七．（13 分）

求椭圆线$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$上长半轴和短半轴的长。

八．（12 分）

1、证明：当$t\ge 1$时，不等式$\ln(1+t^2)<t$ 成立。

2、设 $u_n(x)=\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$，$n=1,2,\cdots$. 证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[0,1]$上一致收敛，

并讨论其和函数在$[0,1]$的连续性、可积性与可微性。