山东科技大学2010年招收硕士学位研究生入学考试

高等代数试卷

一、(30分) 设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$，

$\beta=(1,3,-3)^T$，试讨论当 a,b 为何值时，

1、 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

2、 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

3、 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式。

二、(20分) 设 A 为三阶矩阵，α_1，α_2，α_3 为线性无关的三维列向量，且满足：

$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$。

1、 求矩阵 B，使 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

2、 求 A 的特征值。

三、(20分) 用正交线性替换化二次型 $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形。

四、(20分)

1、 如果把实 n 阶对称矩阵按合同分类，即两个 n 阶对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有几类？

2、 n 阶复对称矩阵按合同分类又可以分为几类？

科目代码：826 请在答题纸（本）上做题，在此试卷或草稿纸上做题无效！

五、(20分) 设 $A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$，$k$ 是给定的正整数，

试证存在常数 λ，使得 $A^k=\lambda^{k-1}A$。

六、(20分) 求向量组 $\alpha_1=(2,1,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,3)$，$\alpha_3=(0,1,4,3,)$，

$\alpha_4=(1,0,-2,-1)$，$\alpha_5=(1,2,9,8)$ 的一个极大线性无关组，并用极大线性无关组表示向量组的其它向量。

七、(20分) 设 V_1 与 V_2 分别是齐次线性方程组

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0 \quad 及 \quad x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=x_n$$

的解空间，证明：$P^n=V_1\oplus V_2$。