山东科技大学2010年招收硕士学位研究生入学考试

数学分析试卷

一、求极限（每小题5分，共15分）

1、计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-5\times 2^n}{5\times 3^{n+1}+2^{n+1}}$，　　2、计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$，

3、求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]$。

二、计算导数与微分（每小题5分，共15分）

1、求导数：$y=\ln(\tan\dfrac{x}{2})$，　2、设 $x^2\sin y+xy^2=1$，求 dy，

3、计算函数 $y=x^2e^x$ 的20阶导数 $y^{(20)}$。

三、积分及应用（每小题5分，共15分）：

1、$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$，　　2、$\int_1^e (x\ln x)^2dx$，

3、求极坐标曲线心形线 $r=a(1+\cos x)$ $(a>0)$ 绕极轴旋转所得旋转曲面的面积。

四、证明不等式（每小题9分，共18分）

1、设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的导数，且 $f(x)$ 不恒为零，$f(a)=f(b)=0$。试证：$\int_a^b xf(x)f'(x)dx<0$。

2、证明：对任意的实数 a,b,c，有 $e^{\frac{a+b+c}{3}}\le\dfrac{1}{3}(e^a+e^b+e^c)$。

五、证明题（12分）：

设 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的连续减函数，$f(x)>0$；

又设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)dx$。证明：数列 $\{a_n\}$ 为收敛数列。

科目代码：603　请在答题纸（本）上做题，在此试卷或草稿纸上做题无效！

六、证明下列各题（每小题10分，共20分）

1、　设 $z=e^{\frac{x}{y}}$，证明它满足方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$。

2、若级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^\infty c_n$ 都收敛，且成立不等式

$$a_n\le b_n\le c_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ 也收敛．若 $\sum a_n$，$\sum\limits_{n=1}^\infty c_n$ 都发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ 一定发散吗？

七、求解下列各题（每小题10分，共20分）

1、求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$，并考察 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的可微性。

2、求球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截出的曲线在点 $(3,4,5)$ 处的切线与法平面方程。

八、求解下列各题（每小题10分，共20分）

1、计算三重积分

$I=\iiint\limits_V(x+y+z)dxdydz$。其中 $V:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$。

2、$\oiint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 S 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 与平面 $z=h$ 所围空间区域 $(0\le z\le h)$ 的表面，方向取外侧。

九、（15分）

计算积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-2x}-e^{-5x}}{x}dx$ 的值。