一、（20 分）设 $f(x)=x^3+ax+b$，当 a,b 满足什么条件时 $f(x)$ 有重根？

二、（20 分）设 A 为 $m\times n$ 矩阵， $R(A)=r$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的一个基础解系，β 为 $AX=b$ 的一个解，其中 b 为 m 维非零列向量。

证明：1、$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$ 线性无关；

2、$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_{n-r}+\beta,\beta$ 线性无关。

三、（20 分）设 A 为 3 阶正交矩阵，且 $|A|=1$，证明：

1、1 是 A 的一个特征值；

2、A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 可以表示为 $f(\lambda)=\lambda^3-a\lambda^2+a\lambda-1$，其中 a 为某个实数。

四、（20 分）讨论方程组 $\begin{cases} ax_1+(a-1)x_2+x_3=1 \\ ax_1+ax_2+x_3=2 \\ 2ax_1+2(a-1)x_2+ax_3=2 \end{cases}$ 何时无解，何时有唯一解，何时有无穷多组解，并在有解情况下求解。

五、（20 分）设 $\begin{cases} \alpha_1=(1,0,0,0) \\ \alpha_2=(1,2,0,0) \\ \alpha_3=(1,2,3,0) \\ \alpha_4=(3,4,3,0) \end{cases}$，$\begin{cases} \beta_1=(1,1,1,1) \\ \beta_2=(1,1,1,0) \\ \beta_3=(1,1,0,0) \\ \beta_4=(3,3,2,1) \end{cases}$ 为 R^4 上的两个向量组，

证明：在 R^4 上有线性变换 A 使得 $A(\alpha_i)=\beta_i, i=1,2,3,4$。

六、（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}$，且 $|A|=3$，

$|B|=2$，求$|2A-B|$。

七、（20 分）计算行列式的值，其中$b_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$：

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

八、（15 分）设n阶实对称矩阵A的特征值全大于零，

证明：$|E_n+A|>1$。