一、求下列极限（每题 5 分，共 20 分）：

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$　　2．$\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\frac{1}{1+\ln x}}$

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$，　　4．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x \sin(t^2)dt$

二、求导数与高阶导数（每题 5 分，共 20 分）：

1．已知 $y=x^{\sin x}$，求 y'。　　2．已知 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $y^{(n)}$。

3．由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_{x^2}^1\cos(t^3)dt=0$ 确定了 y 是 x 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

4．已知 $y=x^2\cos 2x$，求二阶微分 d^2y。

三、计算不定积分和定积分（每题 5 分，共 20 分）：

1．$\int x^2\arctan x dx$　　2．$\int\dfrac{1}{x(1+x^5)}dx$

3．$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$　　4．已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx=\dfrac{\pi}{2}$，计算 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}dx$。

四、证明下面结论（每题 5 分，共 15 分）：

1．$\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{n\to\infty}[\cos x\cdot\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}]\}=1$。

2．当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，证明不等式：$\sin x+\tan x>2x$。

3．证明：当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时，存在 $\varsigma\in[a,b]$，

$\int_a^{\varsigma}f(x)dx=2\int_{\varsigma}^b f(x)dx$。

五、求解下列各题（每题 6 分，共 24 分）：

1．已知 $u=x^{\frac{y}{z}}$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。　　2．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$ 的和函数。

3．求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-5=0$ 所确定的隐函数的偏导数

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

4．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{4^n}$ 的敛散性。

六 、计算下列各题（每题 8 分，共 32 分）：

1. 求平面 $z=0$，圆柱面 $x^2+y^2=2x$，锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的曲顶柱体的体积。

2．计算三重积分 $I=\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$. 其中

$V: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$。

3．求 $I=\int_l (x+y)ds$ ，其中 l 为以点 $O(0,0),\ A(1,0),\ B(0,1)$ 为顶点的三角形边界。

4．求 $I=\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为任一不包含原点的闭区域的边界，方向为逆时针方向。

七、讨论函数的可微性(9 分)：

求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$，并考察 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的可微性。

八、求极值并证明不等式（10 分）：求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件：

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\ \ (x>0,y>0,z>0,r>0)$ 下的极小值。

并证明不等式：$3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^{-1}\le\sqrt[3]{abc}$，其中 a,b,c 为任意正常数。