



→ (A), 表示流入; (A) →, 表示流出.

1) 写出表示交通网络图各交通枢纽的交通流量的线性方程组, 并求解该方程组. (20分)

2) 若 $x_6 = 300$ 辆/小时, $x_7 = 1300$ 辆/小时, 求交通流量 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . (5分)

四、设 σ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换, $\sigma(V)$ 表示 σ 的值域, $\sigma^{-1}(0)$ 表示 σ 的核. 证明: $\dim \sigma(V) + \dim \sigma^{-1}(0) = n$, 其中 $\dim \sigma(V)$ 表示子空间 $\sigma(V)$ 的维数. (25分)

五、设 A 为 $m \times n$ 的复矩阵, B 为 $n \times m$ 的复矩阵.

证明: $I_m - AB$ 可逆的充分必要条件是 $I_n - BA$ 可逆, 其中 I_m 表示 m 级的单位矩阵. (25分)

六、设 A 是一个 n 级复矩阵且 A 可逆, A 和 A^{-1} 分块如下:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中 A_{11}, B_{11} 分别为 $k \times k$ 和 $k \times l$ 的矩阵. (共 25 分)

证明: (1) 齐次线性方程组 $A_{12}x = 0$ 的解空间 V_1 同构于 $B_{21}y = 0$ 的解空间 V_2 . (20分)

(2) $k + \text{rank}(A_{12}) = l + \text{rank}(B_{21})$. (5分)