

聊城大学

2008 年硕士研究生入学考试初试试题

学科专业名称: 基础数学、应用数学、系统理论

考试科目名称: 数学分析

(A) 卷

注意事项: 1、本试题共 10 道大题 (共 18 个小题), 满分 150 分。

2、本卷为试题, 答题另有答题纸。答案一律写在答题纸上, 写在该试题纸上或草稿纸上无效。要注意试卷清洁, 不要在试卷上涂划。

3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写, 其它均无效。

4、特殊要求携带的用具请注明, 没有特殊要求填“无”。

无

一、试述下列概念 (第 1 小题 10 分, 第 2 小题 5 分, 共 15 分):

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 a 可微及其微分的定义;

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (a,b) 关于 x 的偏导数的定义。

二、计算下列各题 (每小题 6 分, 共 48 分):

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$;

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{3x + 2} \sin \frac{2}{x}$;

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$;

5. 函数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ ($x > 0$) 的导数;

6. 参数方程 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$;

7. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

8. 函数 $\sin^2 x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并确定它收敛于该函数的区间。

三. 证明 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ (12 分).

四. 证明 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续 (10 分)。

五. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ 的和函数 (16 分)。

六. 证明 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在 origin 不可微 (16 分)。

七. 计算第一型曲面积分 $\iint_S xyz dS$, 其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分 (10 分)。

八. 应用高斯公式计算 $\oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧 (11 分)。

九. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 且 $F(0)=1, F(x)f(x)=\cos 2x$, 求 $\int_0^{\pi} |f(x)| dx$ 。
(6 分)。

十. 设 f 在 $[a, b]$ 上二阶可导, $f'(a)=f'(b)=0$. 证明存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

(6 分)