

聊城大学

2008 年硕士研究生入学考试初试试题

学科专业名称: 基础数学、应用数学、系统理论

考试科目名称: 高等代数 (A) 卷

注意事项: 1、本试题共 7 道大题 (共 8 个小题), 满分 150 分。

2、本卷为试题, 答题另有答题纸。答案一律写在答题纸上, 写在该试题纸上或草稿纸上无效。要注意试卷清洁, 不要在试卷上涂划。

3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写, 其它均无效。

4、特殊要求携带的用具请注明, 没有特殊要求填“无”。

乙

1. (20 分) 设 m 为任一个正整数. 证明: $g^m(x) | f^m(x)$ 当且仅当 $g(x) | f(x)$.

2. (20 分) 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$

3. (20 分) k 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

有解? 有唯一解? 有无穷多解? 当有解时, 求出其一切解.

4. (20 分) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^2 = A$. 证明: $r(A) + r(A - E) = n$, E 为单位矩阵.

5. (20 分) 证明: 下面每个条件都是 n 阶秩为 r 的实方阵 A 为半正定的充分必要条件:

1) 存在实方阵 B , 使 $A = BB'$;

2) 存在秩为 r 的 $n \times r$ 的实矩阵 B , 使 $A = BB'$.

这里 B' 为 B 的转置矩阵.

6. (25 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

求 $|A|^{2k}$ 及 A^{2k} (k 为正整数).

7. (25 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值. 证明: 存在秩为 1 的 n 阶实对称矩阵 P_1, P_2, \dots, P_n , 使

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n.$$