聊城大学

2009 年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[807]高等代数	B卷
专业名称	基础数学|应用数学|系统理论	

注意事项：1、本试题共 6 道大题（共 12 个小题），满分 150 分。
2、本卷为试题，答题另有答题纸。答案一律写在答题纸上，写在该试题纸上或草稿纸上无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划。
3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写，其它均无效。
4、特殊要求携带的用具请注明，没有特殊要求填"无"。____无____

一、填空题（每小题 5 分，共 25 分。）

1．设 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$，则 $(f(x),g(x))=$__________。

2．在标准内积下，将 R^3 的基 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,0,-1)$ 化为 R^3 的一个标准正交基__________。

3．设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-6&4\\-6&0&2\\2&2&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&7\\3&4&9\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}B^{-1}=$__________。

4．设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+x_3^2$，其中 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值为__________。

5．线性变换 σ 在线性空间 R^2 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$，则 R^2 的所有一维 σ-不变子空间为__________。

二、计算下列行列式（第 1 题 10 分，第 2 题 15 分，共 25 分）

1．$D_4=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\4&2&1&-1\\201&102&-99&98\\1&2&1&-2\end{vmatrix}$　　2．$D_n=\begin{vmatrix}2&3&3&\cdots&3&3\\1&2&3&\cdots&3&3\\1&1&2&\cdots&3&3\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&2&3\\1&1&1&\cdots&1&2\end{vmatrix}_{n\times n}$

三、（25 分）当α,β取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+6x_3+x_4 & = & 3 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4 & = & 1 \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4 & = & \alpha \\ 3x_1-x_2-\beta x_3+15x_4 & = & 3 \end{cases}$$

有唯一解、无解和无穷多解。当方程组有无穷多解时，用其导出组的基础解系给出其通解的表达式。

四、（第 1 题 15 分，第 2 题 10 分，共 25 分）

1．设矩阵A是一个n阶的方阵，用初等变换的方法证明：矩阵A必可以分解成一个可逆的矩阵B和一个幂等矩阵C（$C^2=C$）的乘积（$A=BC$）。

2．设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$，给出一个满秩矩阵$B$和一个幂等矩阵C，使$A=BC$。

五、（25 分）设实矩阵空间$R^{n\times n}$的子空间为

$$W_1=\{A\mid A=A^T,A\in R^{n\times n}\},W_2=\{B\mid B=-B^T,B\in R^{n\times n}\},$$

证明：$R^{n\times n}=W_1\oplus W_2$，其中$A^T$表示矩阵$A$的转置，$\oplus$表示直和。

六、（25 分）设矩阵$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$，给出矩阵$A$的不变因子、初等因子、各级行列式因子以及矩阵$A$的若当标准形。