聊城大学

2010 年硕士研究生入学考试初试试题

学科专业名称：基础数学、应用数学、系统理论

考试科目名称：高等代数 (A)卷

注意事项：1、本试题共 7 道大题（共 12 个小题），满分 150 分.

2、本卷为试题，答题另有答题纸. 答案一律写在答题纸上，写在该试题纸上或草稿纸上无效. 要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划.

3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写，其它均无效.

4、特殊要求携带的用具请注明，没有特殊要求填"无".

无

一、（共 20 分）叙述 n 级行列式的定义，并计算下面的 n 级行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

二、（共 20 分）判断下列命题是否正确，正确的给出证明，错误的给出反例或证明：

命题 1. 设 $F[x]$ 为数域 F 上的一元多项环，$f(x),g(x)\in F[x]$ 且不为零，记 $S=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),v(x)\in F[x]\}$，则 S 中次数最低的非零多项式 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式.（10 分）

命题 2. 设 $F[x]$ 为数域 F 上的一元多项环，$f(x),g(x)\in F[x]$ 且不为零，则 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式的充分必要条件是存在 $u(x),v(x)\in F[x]$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x).$$（10 分）

三、（共 20 分）证明：设 σ 是数域 F 上 n 维线性空间 V 的线性变换，数域 F 上的多项式 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s), 1\le s\le n$ 使 $f(\sigma)=0$，其中 $\lambda_i\ne\lambda_j (i\ne j)$.

记 $V_i = \ker(\sigma - \lambda_i I), i = 1, \cdots, s$.

证明：1. V_i 为 σ 的不变子空间.（5 分） 2. $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$.（15 分）

注：$\ker(\sigma - \lambda_i I) = \{\alpha \mid (\sigma - \lambda_i I)\alpha = 0, \alpha \in V\}$，$I$ 为恒等变换，$V_1 \oplus V_2$ 表示 V_1 和 V_2 的直和.

四、（共 20 分）设复数域上 $s \times n$ 的矩阵 A 的秩为 1，

1. 证明：必存在复数域上非零的 s 维列向量 x 和 n 维列向量 y，使 $A = xy^T$.（10 分）

2. 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，求非零的 3 维列向量 x 和 y，使 $A = xy^T$.（10 分）

五、（共 25 分）已知线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 3 \\ 15x_1 + 3x_2 - x_3 - k_1 x_4 = 3 \\ 12x_1 + x_2 - 5x_3 - 10x_4 = k_2 \end{cases}$$

问 k_1 和 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解的情况下，用基础解系给出一般解.

六、（共 25 分）设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

1. 求正交的线性替换将二次型化为变量平方和的形式（15 分）

2. 若 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$，求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的最大和最小值，并给出相应 $x_i (i = 1,2,3)$ 的值.（10 分）

七、（共 20 分）设 u, v 是实数域上非零的 n 维列向量，σ 为非零的实数，矩阵 $E(u, v; \sigma) \doteq E_n - \sigma uv^T$ 称为一般的初等矩阵，其中 E_n 表示 n 级单位矩阵.

1. 证明：若 $u \in v^{\perp}$，则 $E(u, v; \sigma)$ 有 n 个线性无关的特征向量；若 $u \notin v^{\perp}$，则 $E(u, v; \sigma)$ 仅有 n-1 个线性无关的特征向量.（15 分）

2. $E(u, v; \sigma)$ 的特征值为 $1, \cdots, 1, 1 - \sigma v^T u$.（5 分）

注：$v^{\perp}$ 表示与向量 v 正交的 n-1 维子空间（内积为向量空间的标准内积：$\alpha = (a_1, \cdots, a_n)$，$\beta = (b_1, \cdots, b_n)$，则 $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.），v^T 表示向量 v 的转置.