

聊城大学

2011 年硕士研究生入学考试初试试题

学科专业名称: 基础数学, 应用数学, 系统理论

考试科目名称: 数学分析 [618] (A) 卷

- 注意事项: 1、本试题共 9 道大题 (共 16 个小题), 满分 150 分。
 2、本卷为试题, 答题另有答题纸。答案一律写在答题纸上, 写在该试题纸上或草稿纸上无效。要注意试卷清洁, 不要在试卷上涂划。
 3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写, 其它均无效。
 4、特殊要求携带的用具请注明, 没有特殊要求填“无”。

一. (15 分):

试述罗尔中值定理, 并证明之。

二. 计算下列各题 (每小题 6 分, 共 48 分):

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{2x+1} \right)^x.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5}{3x+2} \sin \frac{2}{x}.$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2} \right).$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}.$

5. 函数 $y = x^{\sin x}$ ($x > 0$) 的导数.6. 参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}.$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx.$

8. $\int \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}.$

三. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 求出 $f''_{xy}(0, 0)$, 并证明 $f''_{xy}(x, y)$ 在

$(0, 0)$ 不连续。(12 分).

四. 设函数 $f''(x)$ 连续, $z = \frac{1}{x}f(xy) + yf(x+y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (10 分).

五. 求幂级数 $\sum n(n+1)x^n$ 的和函数 (20 分).

六. 证明: 函数 $f(x) = \sum \frac{\sin nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且有连续的导函数。(12 分).

七. 计算第二型曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为 $x^2 + 2y^2 = 1$, 方向取逆时针。(10 分).

八. 应用高斯公式计算 $\oiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧 (11 分).

九 (12 分) 讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在原点的可微性。