聊城大学2012年硕士研究生入学考试初试试题

考试科目	[812]高等代数	A卷
适用专业	基础数学|应用数学|系统理论|系统分析与集成	

注意事项：1、本试题共9 道大题（共9 个小题），满分 150 分。
2、本卷为试题，答题另有答题纸。答案一律写在答题纸上，写在该试题纸上或草稿纸上无效。
3、答题必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔书写，其它均无效。
4、特殊要求携带的用具请注明，没有特殊要求填“无” 无

1.（15 分）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是数域 P 上两个一元多项式，k 为给定的正整数. 求证：$f(x)|g(x)$ 的充分必要条件是 $f^k(x)|g^k(x)$.

2.（15 分）计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$.

3.（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，证明：当 $n\geq 3$ 时，$A^n=A^{n-2}+A^2-I$，并求 A^{100}，这里 I 为 3 阶单位矩阵.

4.（15 分）A 为 n 阶方阵，证明 $r(A^n)=r(A^{n+1})=r(A^{n+2})=\cdots$

5.（20 分）设 A,B 是数域 F 上的 n 阶方阵且设齐次线性方程组 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间分别为 W_1 和 W_2，证明：

（1）若 $AB=0$，则 $\dim W_1+\dim W_2\geq n$；

（2）$W_1=W_2$ 当且仅当存在 n 阶方阵 P, Q，使 $A=PB$, $B=QA$.

6.（20 分）设 A,B 均为实对称阵，证明：存在正交阵 T，使 T^TAT,T^TBT 同时为对角阵的充要条件是 $AB=BA$.

7.（20 分）设 A,B 为 n 阶方阵，且 $A+B+AB=0$. 证明：

（1）A 与 B 的特征向量是公共的；

（2）A 相似于对角矩阵，当且仅当 B 相似于对角矩阵；

（3）$r(A)=r(B)$

8.（15 分）设 V 是无限维欧式空间，σ 是 V 的正交变换，W 是 σ 的有限维不变子空间，证明：$W^{\perp}$ 也是 σ 的不变子空间，且 $V=W\oplus W^{\perp}$.

9.（15 分）证明：n 阶复矩阵 A 可对角化的充要条件为任给 n 维列向量 X，若 $(\lambda_0E-A)^2X=0$，必有 $(\lambda_0E-A)X=0$，这里 E 为 n 阶单位矩阵，$\lambda_0\in C$.