

中国石油大学(华东)

2007 年硕士学位研究生入学考试试题 (A 卷)

考试科目: 高等数学

总 3 页 第 1 页

注意: ①考生在本试卷或草稿纸上答题无效。所有试题答案必须标明题号, 按序写在专用答题纸上。

②本试卷约定: 除特殊说明外, \sin , \cos , \tan 和 \ln 分别表示正弦、余弦、正切和自然对数函数, π 和 e 分别为圆周率和自然对数的底。本试卷共三道大题 25 道小题。

以下是试题内容:

一、填空题 (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 满分 40 分)

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____。

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}} =$ _____。

3. 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则 $y''|_{x=0} =$ _____。

4. 积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}} =$ _____。

5. 函数 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为 _____。

6. 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则 $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$ _____。

7. 设原点到点 (x, y) 的向径为 r , x 轴到 r 的转角为 θ , x 轴到射线 l 的转角为 φ , $r = \|r\|$, 则 $\frac{\partial r}{\partial l} =$ _____。

8. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos 2t \end{cases}$ 在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为 _____。

9. 两平面 $x - y + 2z = 6$ 与 $z = 5 - 2x - y$ 的夹角为 _____。

10. 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 _____。

二、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 32 分)

11. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

【 】

12、设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ ，则 $F(x)$

- (A) 为正常数 (B) 为负常数
(C) 恒为零 (D) 不为常数

【 】

13、设 $f(x)$ 是连续函数， $F(x)$ 是其原函数，则

- (A) 当 $f(x)$ 是偶函数时， $F(x)$ 必为奇函数
(B) 当 $f(x)$ 是奇函数时， $F(x)$ 必为偶函数
(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时， $F(x)$ 必为周期函数
(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时， $F(x)$ 必为单调增函数

【 】

14、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0) > 0$ ，则存在 $\delta > 0$ ，使得

- (A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调递增
(B) $f(x)$ 在 $(-\delta, 0)$ 内单调递减
(C) $\forall x \in (0, \delta)$ ， $f(x) > f(0)$
(D) $\forall x \in (-\delta, 0)$ ， $f(x) > f(0)$

【 】

15、设函数 $f(x) = \frac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ，则常数 a, b 满足

- (A) $a < 0, b < 0$ (B) $a > 0, b > 0$
(C) $a \leq 0, b > 0$ (D) $a \geq 0, b < 0$

【 】

16、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线

与 x 轴交点的横坐标是

- (A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3$ (B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3$
(C) $-8 \ln 2 + 3$ (D) $8 \ln 2 + 3$

【 】

17、设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ ， S_1 为 S 在第一卦限的部分，则有

- (A) $\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS$ (B) $\iint_S y dS = 4 \iint_{S_1} x dS$
(C) $\iint_S z dS = 4 \iint_{S_1} x dS$ (D) $\iint_S xyz dS = 4 \iint_{S_1} xyz dS$

【 】

18、设两向量 $a = 2i + j - k$ ， $b = i - j + 2k$ ，其中 i, j, k 分别为 x, y, z 方向的单位向量，则 $a \times b =$

- (A) $i - 5j - 3k$ (B) $\sqrt{35}$
(C) $2i - j - 2k$ (D) -1

【 】

三、解答题 (本题共 7 小题, 满分 78 分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19、(8 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x} - 1 + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

20、(10 分) $f(x)$ 为定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$. 已知

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j\pi(x+2)y} dx = \varphi(y)$, 其中 $j = \sqrt{-1}$, $\varphi(y)$ 为已知函数, 试求 $f(x)$ 的表达式.

21、(12 分) 计算积分 $\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, 其中 S 为曲面 $x^2 + y^2 = z^2$

介于平面 $z=0$ 和 $z=h$ ($h>0$) 之间的部分的下侧, $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 为曲面 S 上任意点 (x, y, z) 处法向量的方向余弦.

22、(12 分) 写出函数 $f(x) = e^x$ 展开到 n 阶近似的麦克劳林公式, 给出其误差范围, 并计算 \sqrt{e} 的二阶近似值.

23、(12 分) 求表面积为定值 a^2 而体积为最大的长方体的棱长和体积.

24、(12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域, 并讨论该区间端点处的收敛性.

25、(12 分) 设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$,

(1) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(2) 求 $f(x)$ 的值域.