中国石油大学（华东）
2008 年硕士研究生入学考试试题

注意：考生在本试题或草稿纸上答题无效。所有试题答案必须标明题号，按序写在专用答题纸上。

以下是试题内容:

一、**填空题**（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分.）

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=$________.

（2）曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面方程为________.

（3）设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$，则 $a_2=$________.

（4）曲线 $y=x\ln x$ 上与直线 $x-y+1=0$ 平行的切线方程为________.

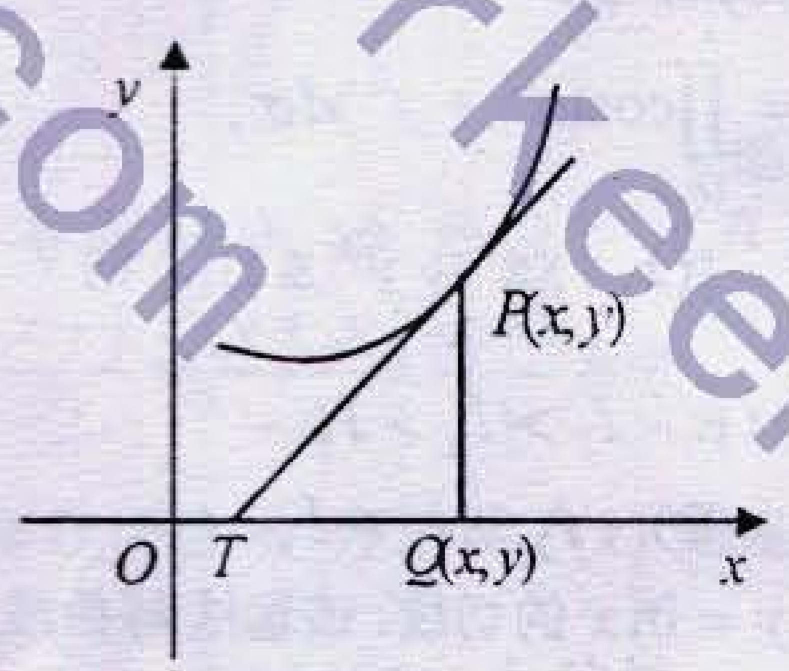
（5）已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$________

（6）设 L 为圆周 $x^2+y^2=4$，则曲线积分 $\oint_L(x^2+y^2)dS=$________.

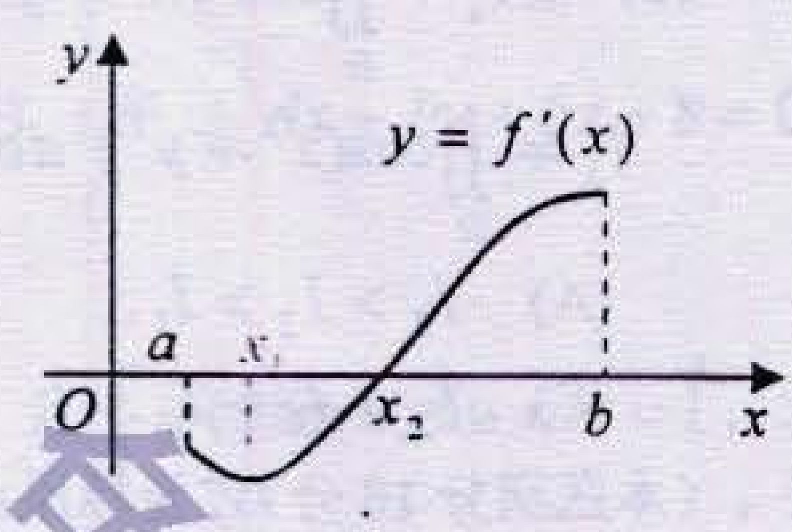
二、**选择题**（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。）

（1）如题二（1）图所示曲线 $y=f(x)$ 上任一点 P 处的切线为 PT，以 PT 为斜边的直角三角形 PTQ 的面积为 $\frac{1}{2}$，则 y 与 y' 满足的微分方程是

（A）$y'=y$.（B）$y'=-y$.（C）$y'^2=y$.（D）$y'=y^2$.



题二（1）图



题二（2）图

（2）函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有定义，其导数 $f'(x)$ 的图形如题二（2）图所示，则

(A) x_1,x_2 都是极值点.　　(B) $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))$ 都是拐点.

(C) x_1 是极值点，$(x_2,f(x_2))$ 是拐点.　　(D) $(x_1,f(x_1))$ 是拐点，x_2 是极值点.

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则

(A) 点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点.
(B) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极大值点.
(C) 点(0,0)是 $f(x,y)$ 的极小值点.
(D) 根据所给条件无法判断点(0,0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

(4) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$.

(5) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$.　　(B) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$.

(C) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$.　　(D) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}$.

(6) 设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)d\sigma$,

$I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2d\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则

(A) $I_3>I_2>I_1$.　　(B) $I_1>I_2>I_3$.
(C) $I_2>I_1>I_3$.　　(D) $I_3>I_1>I_2$.

三、(本题满分 10 分)过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(1) 求 D 的面积 A;

(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

四、(本题满分 12 分) 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

五、（本题满分 10 分）求 $\int_{ACB}(e^x\sin 2y-y)dx+(2e^x\cos 2y-100)dy$，其中积分路径为单位圆 $x^2+y^2=1$ 的上半圆周从 A(1，0)到 B(−1,0).

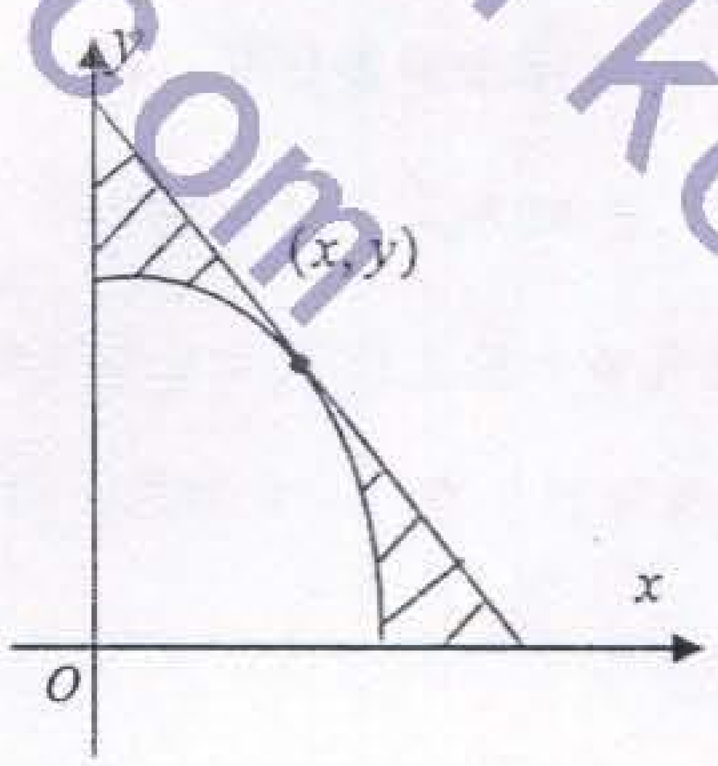
六、（本题满分 10 分）求二重积分 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy$，其中 D 是第一象限内，由曲线 $x^2+y^2=1$，$x^2+y^2=4$，$y=x, y=0$ 围成的闭区域.

七、（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 内可导，且 $f(\frac{\pi}{4})=0$，证明存在一点 $\xi\in(0,\frac{\pi}{4})$，使 $2f(\xi)+f'(\xi)\sin 2\xi=0$.

八、（本题满分 12 分）设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,y)(x>0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $(\frac{1}{2},0)$.（题八图）

（1） 试求曲线 L 的方程；

（2） 求 L 位于第一象限部分的一条切线，使该切线与 L 以及两坐标轴所围图形的面积最小。



题八图

九、（本题满分 10 分）当 A,B 为何值时，平面 $Ax+By+6z+8=0$ 与直线 $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{3}$ 垂直.

十、（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\int_0^{\pi} f(x\sin x)\sin x dx=1$，求定积分 $\int_0^{\pi} f(x\sin x)x\cos x dx$ 的值

十一、（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

十二、（本题满分 8 分）求极限 $\lim_{x\to 0}(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x})$.