

中国石油大学（华东）
2009 年硕士研究生入学考试试题（A 卷）

考试科目：高等数学

总 3 页 第 1 页

注意：考生在本试题或草稿纸上答题无效。所有试题答案必须标明题号，按序写在专用答题纸上。

以下是试题内容：

一、填空题（本题共 7 小题，每小题 5 分，满分 35 分，请将答案写在答题纸上）

1、当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ 是 x 的 _____ 阶无穷小。

2、设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定，则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3、 $y = x + 2 \cos x$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 _____。

4、 $\int x f''(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5、 $\int_0^a \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6、设 $\vec{a} = (2, 5, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$, 问 λ 和 μ 存在什么样的关系 _____, 才有 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ 与 z 轴垂直。

7、设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L (x dy - 2y dx)$ 的值为 _____。

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将所选项前的字母写在答题纸上）

8、设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导，则【 】

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$

9、函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导, 则在 (a,b) 内 $f'(x) > 0$ 是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加的【 】

- (A) 充分但非必要条件 (B) 必要但非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 无关条件

10、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义, 在开区间 (a,b) 内可导, 则【 】

- (A) 当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$
(B) 当 $f(a) = f(b)$ 时, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi) = 0$
(C) 对任何 $\xi \in (a,b)$, 有 $\lim_{x \rightarrow \xi} [f(x) - f(\xi)] = 0$
(D) 存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

11、设 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4\sqrt{2}$, 则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ 【 】

- (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 2 (D) $4\sqrt{2}$

12、设函数 $u(x,y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有【 】

- (A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 90 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

13、(8 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}$ 的极限.

14、(12 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = 0$. 证明: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'''(\xi) = 3$.

15、(10 分) 证明 $0 < x < \pi$ 时, $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$.

16、(8 分) 求 $\sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{6}$ 处的幂级数.

17、(10 分) 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上点 $M_0 \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$ 处沿横坐标增加方向的切线向量, $z = xy$, 试求 $\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_{M_0}$.

18、(10 分) 设 $D = \{(x,y) \mid |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$, 计算二重积分 $\iint_D |y - x^2| dx dy$.

考试科目：高等数学

总 3 页 第 3 页

19、(10分) 求过点 $(2, 1, \frac{1}{3})$ 的平面，使它与三个坐标面在第一象限内所围成的立体体积最小。

20、(12分) 将函数 $f(x) = 2 + |x|$, $(-1 \leq x \leq 1)$ 展成以 2 为周期的傅立叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和。

21、(10分) 求初值问题的特解： $xy' + 2y = x \ln x$, $y|_{x=1} = -\frac{1}{9}$ 。