

考试科目: 高等数学 报考专业: _____

要求: 1、答案一律写在答题纸上

2、需配备的工具:

一、选择题: (本题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

1. $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x$ 是 x 的

- (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小
(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

【 】

2. $f(x) = \begin{cases} a+bx^2 & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 a 与 b 应满足的关系是

- (A) $a+b=0$ (B) $a+b=1$
(C) $a-b=0$ (D) $a-b=1$

【 】

3. $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 的导数是

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) 不存在

【 】

4. 方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 是

- (A) 没有实根 (B) 有且仅有一个实根
(C) 有且仅有两个不同的实根 (D) 有三个不同的实根

【 】

5. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $F(x) = \int_x^{e^{-x}} f(t) dt$ 则 $F'(x) =$

- (A) $-e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$ (B) $-e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$
(C) $e^{-x} f(e^{-x}) - f(x)$ (D) $e^{-x} f(e^{-x}) + f(x)$

【 】

二〇〇八年硕士研究生入学考试试题

6. 直线 $\begin{cases} x+y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 和平面 $x-y-z+1=0$ 间的夹角是 **【 D 】**
- (A) 60° (B) 0° (C) 30° (D) 90°

7. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $f(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$,

则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

- (A) 不可导 (B) 可导, 且 $f'(0) \neq 0$
(C) 取得极大值 (D) 取得极小值 **【 D 】**

8. 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ 是 **【 C 】**

- (A) 发散; (B) 收敛;
(C) 条件收敛; (D) 绝对收敛.

9. 曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围立体的体积为

(A) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$; (B) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz$;

(C) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{x^2+y^2} dz$; (D) $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^1 dz$. **【 B 】**

10. $y = y_1(x)$ 是 $y' + P(x)y = 0$ 的解, $y = y_2(x)$ 是 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解, c 是任意常数, 则下列各式中一定为 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的解是

(A) $y = cy_1(x) - y_2(x)$ (B) $y = y_1(x) + cy_2(x)$

(C) $y = cy_1(x) + y_2(x)$ (D) $y = cy_1(x) + cy_2(x)$ **【 A 】**

二、填空题 (11-16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right) =$ _____

12. 已知函数 $f(x) = e^{-x} \ln ax$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处有极值, 则 $a =$ _____

13. 由曲线 $y = 3 - x^2$ 及 $y = 2x$ 所围图形面积 $S =$ _____

14. L 是半径为 2, 圆心在原点, 按逆时针方向绕行的上半圆周, 则 $\int_L y^2 dx =$ _____

二〇〇八年硕士研究生入学考试试题

△15. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛区间为 _____

16. 方程 $3x^2 + 5x - 5y' = 0$ 的通解为 _____。

三、解答题：(17-24 小题，共 86 分)

17. (8 分) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

18. (8 分) $\int \frac{\sin 2x}{3 + \sin^2 x} dx$

19. (10 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x} & x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

△20. (10 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$

夹在 $z=1$ 与 $z=2$ 之间部分的外侧。

△21. (12 分) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数

22. (12 分) 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

23. (12 分) 设函数 $\varphi(x)$ 连续, 且满足

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t \varphi(t) dt - x \int_0^x \varphi(t) dt, \text{ 求 } \varphi(x).$$

24. (14 分) 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D ,

(1) 求 D 的面积 A ;

(2) 求 D 绕直线 $x=e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .