二00九年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 高等数学（二）A　　**报考专业：** ________

要求：1、答案一律写在答题纸上

2、需配备的工具：

一、填空题：（每小题 5 分，共 50 分）

1. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则函数 $f(\frac{x-1}{x+1})$ 的定义域为________.

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases} x^k\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则正整数 k 的最小值为________.

3. 设由 y 轴，$y=x^2, y=a(0<a<1)$ 所围平面图形，由 $y=a, y=x^2, x=1$ 所围的平面图形都绕 y 轴旋转，所得旋转体的体积相等，则 $a=$________.

4. 设 $x\geq 1$，则 $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=$________.

5. 设 a,b 为常数，且 $a\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a+bx}{a+x}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

6. 设 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t), \end{cases}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$________.

7. 设 $y=x+\arctan y$，则 $y''=$________.

8. 微分方程 $\left(e^{x+y}-e^x\right)dx+\left(e^{x+y}+e^y\right)dy=0$ 的通解为

________.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\le x\le 4,\\ x-2, & 4<x\le 6\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<2,\\ 2+x & 2\le x\le 4\end{cases}$，

则 $f[g(x)]=$______________.

10. 交换二次积分的次序：$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=$__________________.

二、计算下列各题：（每小题 6 分，共 42 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

3. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$，求 y'.

4. $z=y\sin(x+y)$，求 dz.

5. $\int\tan^4 x\,dx$

6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{1+\sin x}$

7. 计算 $\iint\limits_D xy\,dxdy$，其中 D 为直线 $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围成的闭区域

三、（8 分）设 $u=f(x+y,xy)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

四、（14 分）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\ne 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数，

且 $\varphi(0)=1$.（1）确定 a 的值，使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(x)$.

（2）讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性.

五、（8 分）计算 $\iint\limits_D\sqrt{|x^2-y|}\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|\le 1, 0\le y\le 2\}$.

六、（8分）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$

七、（10分）设 $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^m x dx$，（$m$ 为大于1的自然数）. 计算 $I_{m+2}+I_m$；

八、（10分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$. 试证：

存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.