福建师范大学硕士生入学考试试卷

学科专业：基础数学 应用数学

考试科目编号： 434

考试科目：线性代数

考试日期：2006年1月15日下午

考生请注意： 本卷满分为150分，考试时间为3小时。
须在《答题纸》上作答，否则无效。

一. 填空 (共 52 分)(注意：答案写在《答题册》上，否则无效)

1. (4 分) 设三元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 2, 有 3 个特解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 且 $\alpha_3 - \alpha_2 = (1,0,0)'$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1,1,1)'$, 则该非齐次线性方程组的通解为 ________.

2. (12 分) 设 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ 是 3 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 5 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 6 \end{pmatrix}$$

的特征值，则 A 的行列式 $|A|$=________; A^{-1} 的所有特征值为 ________; A 在相似关系下的标准形为 ________.

3. (4 分) 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

P 是 3 阶可逆矩阵，令 $B = P^{-1}AP$, 则 $B^{2008} - 3A$=________.

4. (4 分) 设 V 是数域 F 上的向量空间， $f: V \times V \to F$ 是对称双线性函数，若 $f(\alpha + 2\beta, \alpha - 3\beta) = 4, f(2\alpha + \beta, \alpha - \beta) = -3$, $f(\alpha - 2\beta, \alpha - \beta) = 2$, $\alpha, \beta \in V$, 则 $f(k_1\alpha + k_2\beta, k_3\alpha + k_4\beta)$ =________.

5. (12 分) 设二次型 $f(x,y,z,w) = xy + yz + zw + wx$, 则它对应的矩阵是 ________, 正惯性指标是 ________, 负惯性指标是 ________, 符号差是 ________.

6. (8 分) 设 U 是欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 的由向量 α_1, α_2 生成的一个子

空间, 其中 $\alpha_1=(1,1,2,1),\alpha_2=(1,0,0,-2)$, 则 $\dim U^{\perp}=$________;
$U^{\perp}$ 的一个标准正交基为 ________.

7. (8 分) 矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

的约当标准形为 ________; 极小多项式为 ________.

二. (20 分) 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

求一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

三. (24 分) 设 $(V,<,>)$ 是 n 维欧氏空间, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 则下列命题等价:

1. $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个标准正交基;

2. 对于任意 $\alpha\in V$, 有

$$\alpha=<\alpha,\varepsilon_1>\varepsilon_1+<\alpha,\varepsilon_2>\varepsilon_2+\cdots+<\alpha,\varepsilon_n>\varepsilon_n;$$

3. 对于任意 $\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n,\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n\in V$, 有

$$<\alpha,\beta>=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

福建师范大学硕士生入学考试试卷

学科专业： 基础数学 应用数学

考试科目编号： 434

考试科目： 线性代数

考试日期： 2006年1月15日下午

考生请注意： 本卷满分为150分，考试时间为3小时。
须在《答题纸》上作答，否则无效。

四. (30 分) 设 $\mathbb{C}$ 是复数域， $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 是 $n\times m$ 复矩阵，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 A 的列向量， B 是 $m\times s$ 矩阵. 记 $I(A)=\{A\alpha|\alpha\in\mathbb{C}^m\}$, $N(A)=\{\alpha|A\alpha=0\}$, $r(A)$ 表示 A 的秩，$D=N(A)\cap I(B)$, H 为 D 在 $I(B)$ 中的补子空间， $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为 H 的一个基， $L(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t)$ 表示由向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 生成的子空间. 证明：

1. $I(A)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间;
2. $\dim I(A)=r(A)$;
3. $\dim N(A)=m-r(A)$;
4. $A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_r$ 线性无关;
5. $I(AB)=L(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_r)$;
6. $r(AB)=r(B)-\dim(N(A)\cap I(B))$.

五. (24 分) 证明：

(1) 设 $A=\begin{pmatrix} B & \alpha \\ \alpha' & a \end{pmatrix}$ 是一个 n 阶实对称矩阵，其中 $|B|\neq 0$, α 是 $n-1$ 维向量，则 A 合同于 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a-\alpha' B^{-1}\alpha \end{pmatrix}$;

(2) 设 n 阶实对称矩阵 A 的 i 阶顺序主子式为 d_i, $i=1,2,\cdots,n$, 若 $d_i\neq 0$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 则 A 合同于 $\operatorname{diag}\left\{d_1,\frac{d_2}{d_1},\cdots,\frac{d_n}{d_{n-1}}\right\}$;

(3) 利用 (2) 的结果证明： A 是正定的当且仅当 A 的顺序主子式全大于零.