

# 福建师范大学硕士生入学考试试卷

学科专业：课程与教学论(数学)

考试科目编号： 433

考试科目：线性代数和数学分析

考试日期：2006年1月15日下午

**考生请注意：**本卷满分为150分，考试时间为3小时。

须在《答题纸》上作答，否则无效。

《线性代数》部分（共 70 分）

一. (10分) 求下述数域  $K$  上非齐次线性方程组的解集.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 6 \end{cases}$$

二. (10分) 设  $n$  阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

计算行列式  $|AB|$ .

三. (20分) 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . 求  $A^4, A^9, A^n$  ( $n$  为正整数).

四. 证明题 (共 30 分, 2 小题, 每小题 15 分)

1. 设  $A$  为  $n$  阶矩阵. 证明: 线性方程组  $AX = b$  对任意  $n$  维列向量  $b$  都有解的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ .
2. 设  $A, B$  为数域  $K$  上的  $n$  阶矩阵且  $A$  有  $n$  个互不相同的特征值, 证明  $AB = BA$  的充分必要条件是  $A$  的特征向量都是  $B$  的特征向量.

数学分析部分, 共 80 分

一. 计算下列各题 (共 40 分, 每小题 8 分)

1. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ .

2. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$ .

3. 利用重积分计算  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

4. 抛物面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $x + y + z = 1$  截成一个椭圆, 求原点到椭圆的最长和最短的距离.

5. 求  $\int_L (e^x \sin y - 3y) dx + (e^x \cos y - 3) dy$ , 其中  $L$  是曲线  $y = \sqrt{2x - x^2}$  上由点  $A(1, 1)$  到点  $O(0, 0)$  的一段弧.

二.(14 分) 设  $f(x)$  在开区间  $(1, +\infty)$  上一致连续.

证明: (1)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  存在且有限.

(2) 函数  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(1, +\infty)$  上有界.

三.(14 分) 设函数列  $\{f_n(x)\}$  和  $\{g_n(x)\}$  都在  $[a, b]$  上一致收敛, 并且对每个  $n$ ,  $f_n(x)$  和  $g_n(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

证明: (1) 函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致有界.

(2) 函数列  $\{f_n(x)g_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

四.(12 分) 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续且有界, 试问极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda f(x)}{\lambda^2 + x^2} dx$$

是否存在, 证明之.