福建师范大学硕士生入学考试试卷

学科专业：概率论与数理统计

考试科目编号： 430

考试科目：概率论与数理统计

考试日期：2007年1月21日下午

考生请注意：本卷满分为150分，考试时间为3小时。
须在《答题纸》上作答，否则无效。

一、填空题(本题共24分，4小题，每小题6分)：**请把题号及答案写在答题纸上**.

1. 已知事件 A, B 独立，且 $P(A) = 0.4, P(A \bigcap B) = 0.32$, 则 $P(\overline{A} \bigcup B) =$ ________.

2. 随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi = \mu$, 均方差为 $D\xi = \sigma^2$, 则当 $a =$ ________, $b =$ ________ 时， $E(a + b\xi) = 0, D(a + b\xi) = 1$.

3. 设 ξ 服从 Poisson 分布，且 $P(\xi = 1) = P(\xi = 2)$, 则 $P(\xi = 4) =$ ________.

4. 设总体 $X \sim N(\mu,\ 6^2)$ ， μ 为未知参数. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的容量为 n 的随机样本， $\overline{X}$ 为样本均值。给定假设检验：

$$H_0 : \mu = 8 \leftrightarrow H_1 : \mu = 11$$

显著性水平为 α 的拒绝域 $C = \{(x_1, \cdots, x_n) : U_0 = \frac{\overline{X}-8}{6}\sqrt{n} > \mu_\alpha\}.$ ，其中 u_α 为标准正态分布的上侧分位点，即 $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$. 则其第二类错误的概率 $\beta_2 =$ ________.

二、计算题(共 60 分， 4 小题，每小题 15 分):

5. 已知甲袋中有 2 只白球， 4 只红球， 8 只黑球，乙袋中有 3 只白球， 9 只红球， 6 只黑球. 现从甲、乙袋中各任取一球，求取出的两个球颜色不同的概率.

6. 已知随机变量 (ξ, η) 的密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求 ξ, η 的协方差.

7. 设总体 X 服从双参数指数分布，具有概率密度函数

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}}, & x\geq\theta_1;\\ 0, & x<\theta_1\end{cases}$$

其中 $-\infty<\theta_1<\infty$, $0<\theta_2<\infty$。为了估计未知参数，从总体 X 抽取容量为 n 的随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$。试求未知参数 θ_1 和 θ_2 的极大似然估计量。

8. 假设某种产品按每箱 10 件包装，每箱中含次品数等可能地为 0,1,2. 开箱检验时，从中任取一件，若检验为次品，则认为该箱不合格而拒收. 由于检验误差，假设一件正品被误判为次品的概率为 0.02, 一件次品被误判为正品的概率为 0.1, 求检验一箱产品能通过验收的概率.

三、综合讨论题 (本题 56 分， 2 小题，每小题 28 分)

9. 设二维 $r.v.$ (ξ,η) 的密度函数 $p(x,y)=\begin{cases}C, & x^2+y^2\leq 4;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 试： (1) 确定常数 C 的值； (2) 求 ξ,η 的边际密度函数； (3)ξ 与 η 是否独立？为什么？ (4) 求 $\eta=y\in(-2,2)$ 条件下， ξ 的条件密度函数 $p_{\xi|\eta}(x|y)$； (5) 求 $\xi-\eta$ 的密度函数.

10. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma_0^2)$, 其中 σ_0^2 为已知，μ 为未知参数. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的容量为 n 的随机样本， $\overline{X}$ 为样本均值。考虑参数 μ 的区间估计，给定置信度 $1-\alpha(0<\alpha<1)$,

(1) 证明随机区间 $(\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$ 和 $(\overline{X}-u_{\alpha/5}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+u_{4\alpha/5}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}})$ 都是参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间. 试问哪一个置信区间更为合理？（可以取 $\alpha=0.05$ 加以说明, $\mu_{0.025}=1.96$, $\mu_{0.01}=2.325$, $\mu_{0.04}=1.755$)

(2) 随着样本容量 n 的增大，置信区间的长度会变短。试问当 n 达到多大时，参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度不大于 $L(>0)$。

四、证明题 (本题 10 分)

11. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots$ 为相互独立的 $r.v.$ 序列, 试证明 $\sum_{n=1}^{+\infty}|\xi_n|<\infty$, $a.s.$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{+\infty} E\{|\xi_n|\wedge 1\}<\infty$, $a.s.$