福建师范大学硕士生入学考试试卷

学科专业：基础数学，计算数学，应用数学，运筹学与控制论

考试科目编号： 628

考试科目：高等代数

考试日期：2007年1月21日上午

考生请注意：本卷满分为150分，考试时间为3小时。
须在《答题纸》上作答，否则无效。

一. 填空 (共 50 分)(注意：答案写在《答题纸》上，否则无效)

1.(6 分) 若 4 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 &= 0 \end{cases}$$

的解空间是一维的，则 $a=$ ________; 此时该线性方程组的一个基础解系为 ________________.

2.(4 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}^3$ 是列向量，令 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + k\alpha_2 + 3k\alpha_3, \alpha_3)$, 若 $|A| = 1$, $|B| = 3$, 则 $k =$ ________.

3. (6 分) 已知 3 阶实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & a \end{pmatrix}$$

的特征值分别为 1, -1, 5, 则 $a =$ ________, $x =$ ________,

4. (4 分) 设欧氏空间 V 的两个向量 α_1, α_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\mathcal{A}$ 是 V 的一个正交变换，则 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2)$ 的夹角为 ________.

5. (6 分) 设 V 是数域 F 上的全体 n 阶反对称矩阵所成的向量空间, 则 $\dim V =$________, V 的一个基为 ________________.

6. (9 分) 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换，给出 $\mathcal{A}$ 是对称变换的三个等价条件:

(1) ____________________________________;

(2) ____________________________________;

(3) ____________________________________.

7. (6 分) 设 $\alpha_1 = (0,2,0)', \alpha_2 = (3,0,0)', \alpha_3 = (0,0,2)'$, $\beta_1 = (0,1,0)', \beta_2 = (0,0,1)', \beta_3 = (1,0,0)'$, 则基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 __________; 若向量 α 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $(1,1,1)'$, 则 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 ________.

8. (9 分) 设 V 是 3 维线性空间， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为它的一个基. 线性变换

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: V &\rightarrow V, \\ x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 &\mapsto 2x_1\alpha_1 + 3x_2\alpha_2 + 4x_3\alpha_3 \end{aligned}$$

则 $\mathcal{T}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 ________; $\mathrm{Ker}\mathcal{T} =$ ________; $\mathrm{Im}\mathcal{T} =$________.

二. (20 分) (1) 证明：任意 n 阶方阵均可表示成一个对称矩阵和一个反对称矩阵之和;

(2) 设 A 是 n 阶实方阵，且对任意的非零列向量 α，都有 $\alpha' A\alpha > 0$. 证明：存在正定矩阵 B 和反对称矩阵 C 使得 $A = B + C$.

三. (28 分) 设 α, β 均为非零 n 维列向量，记 $A = \alpha\beta'$,

(1) 求 A 的特征多项式;

(2) 求 A 的最小多项式;

(3) 求 A 的 Jordan 标准形 J_A;

(4) 证明： A 可对角化当且仅当 $\beta'\alpha \neq 0$;

四. (22 分) (1) 设 A, D 分别是 n 阶和 m 阶方阵，则

$$\text{秩}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{cases} \text{秩}A + \text{秩}(D - CA^{-1}B), & \text{当}A\text{可逆} \\ \text{秩}D + \text{秩}(A - BD^{-1}C), & \text{当}D\text{可逆} \end{cases}$$

(2) 设 A, B, C, D 都是 n 阶方阵， $AC = CA$, $|AD - CB| = 0$, $|A| \neq 0$, 令

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

则 $n \leq \text{秩}G < 2n$.

五. (30 分) 在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上，设

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为 n 阶矩阵，其中 $r \in \mathbb{Q}$.

(1) 计算 M_r^2, M_r^t $(1 \le t \le n)$, 进而证明 M_r 的最小多项式是 $x^n - r$, 并给出 π_r 在复数域上可对角化的充分必要条件；

(2) 若 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 且 $(g(x), x^n - r) = 1$, 则矩阵 $g(M_r)$ 可逆；

(3) 若 p_1，p_2 是互异的素数， $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 且 $x^n - p_1p_2 \nmid g(x)$, 则矩阵 $g(M_{p_1p_2})$ 可逆；

(4) 设

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

求一个多项式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 $f(M_{-1}) = A$;

(5) 求多项式 $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 使得 $p(x)f(x) + q(x)(x^3+1) = 1$, 并由此写出 A^{-1}.