福建师范大学硕士生入学考试试卷

学科专业：基础数学，计算数学，应用数学，运筹学与控制论

考试科目编号： 429

考试科目：数学分析与实变初步

考试日期：2007年1月21日下午

考生请注意：本卷满分为150分，考试时间为3小时。
须在《答题纸》上作答，否则无效。

一、**选择题**（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的。要求把答案填在答题纸上）

1．命题"对任意给定的$\xi\in(0,1)$，总存在正整数 N，当$n\geq N$时，恒有$|x_n-a|\leq 2\xi$"是数列$\{x_n\}$收敛于a的（　　）

A.充分条件但非必要条件　　B. 必要条件但非充分条件

C.充分必要条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

2．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点（0，0）处（　　）

A.连续，偏导数存在　　B. 不连续，偏导数存在

C.连续，偏导数不存在　　D.不连续，偏导数不存在

3．若常数$k>0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$（　　）

A.发散　　B.绝对收敛　　C.条件收敛　　D.敛散性不能确定

4.累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 可以写成（　　　）

A. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$　　　　B. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

C. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$　　　　D. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

5. [0, 1]中的 Cantor(康托尔集) P_0 是（　　　）

A.开集　B.零测度集　　C .可数集　　D.[0, 1]中的稠密集

二. **填空题**（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分.要求把答案填在答题纸上）

1. $\lim_{x\to 0}(1+3\sin x)^{\frac{2}{x}} =$（　　　）

2. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛半径 =（　　　）

3. 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为（　　　）

4. 设 Ω 为长方体 $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$，则 $\iiint_{\Omega} e^x \cos y \ln(z+1) dxdydz =$（　　　）

5. 积分 $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y^2} dy =$（　　　）

6. 二元函数 $z=x^y$ 的全微分 $dz =$（　　　）

7. R^{n-1} 当作 R^n 的子集时，其 n 维 $Lebesgue$ 测度等于（　　　）

8. 设 E 为 R^n 中可数子集，$f(x)$ 为 E 上广义实函数，则 $\int_E f(x)dm =$（　　　）

福建师范大学硕士生入学考试试卷

学科专业：基础数学，计算数学，应用数学，运筹学与控制论

考试科目编号： 429

考试科目：数学分析与实变初步

考试日期：2007年1月21日下午

考生请注意：本卷满分为150分，考试时间为3小时。
须在《答题纸》上作答，否则无效。

三、(15 分)设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，要求

(1)确定 a,b 的值，使 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导；

(2)求 $f'(x)$ 的表达式.

四、(10 分)设 $f(x)$ 在[0，1]上具有二阶导数，$f(1)=0, F(x)=x^2f(x)$，试证在（0，1）内至少存在一点 ξ，使 $F''(\xi)=0$.

五、(15 分)设 $x_1=2, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{2}{x_n}), n=1,2,\cdots$，问数列 x_n 是否收敛(要说明理由).若收敛，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

六、(15 分)设 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上连续，且 $f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)dx$，求 $\int_1^e f(x)dx$

七、(10 分)证明 $f(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(xy)}{x}dx$ 在[1，2]上连续.

八、(15 分)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，起点为 (a,b)，终点为 (c,d)，

令 $I=\int_L[\frac{1}{y}+yf(xy)]dx+[xf(xy)-\frac{x}{y^2}]dy$.要求：

(1)证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

(2)当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

九、(9 分)设 $X=[0,+\infty), f_n(x)=\chi_{[n,+\infty)}(x)$ 为特征函数列, $n=1,2,\cdots$，要求：

(1)证明可测函数列 $f_n(x)$ 在 X 上处处收敛于 0;

(2)问可测函数列 $f_n(x)$ 在 X 上是否测度收敛于 0？(简要说明理由)

十、(9 分)设[0，2]上函数 $f(x)=\begin{cases}2, x\in(1,2]\\ 1, x\in[0,1]\cap Q\\ 0, x\in[0,1]-Q\end{cases}$，其中 Q 为有理数全体，要求：

(1)问 $f(x)$ 在[0，2]上是否 Riemann 可积？(简要说明理由).若 Riemann 可积，求 Riemann 积分值.

(2)问 $f(x)$ 在[0，2]上是否 Lebesgue 可积？(简要说明理由).若 Lebesgue 可积，求 Lebesgue 积分值. （第 4 页 全卷完）